۷ امین سمینار آنالیز تابعی و کاربردهای آن
۱۰ و ۱۱ اسفند ۱۴۰۱
دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
قزوین، ایران

یک کران بالا برای مقدار ویژه اصلی P-Q -لاپلاسین

مهدی لطیفی [1] *

[1] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پدافند هوایی خاتم الانبیاء(ص)
$m\_latifi@khadu.ac.ir$

چکیده. در این پژوهش برای مقدار ویژه اصلی مسئله مقدار ویژه غیر خطی $p-q$-لاپلاسین با شرایط مرزی دیریکله بر روی یک ناحیه کراندار در $\mathbb{R}^N$، یک کران بالا ارائه می دهیم. هرچند این کران بالا بهترین نمی باشد اما روش بکارگرفته شده جدید می باشد.

۱. پیش‌گفتار

خواص مقادیر ویژه عملگرها و بخصوص عملگرهای خانواده لاپلاسین، یکی از موضوعات مورد توجه محققین در دهه های اخیر می باشد[۲]. روش های تغییراتی ابزاری مناسب برای حصول نتایجی در زمینه وجود و رفتار مقادیر ویژه می باشد[۳، ۱]. در این پژوهش مسئله مقدار ویژه زیر را مد نظر قرار می دهیم:

$$D(\Omega):\begin{cases}-\Delta_p u-\Delta_q u=\lambda|u|^{p-2}u, & \text{در } \Omega\text{؛}\\ u=0, & \text{روی } \partial\Omega\text{؛}\end{cases} \qquad (۱.۱)$$

که Ω یک ناحیه کراندار در $\mathbb{R}^N$، $\Delta_p u:=div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ عملگر p-لاپلاسین با $p>1$ و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ است. وجود مقدار ویژه برای این مسئله با استفاده از اصل Ljusternik-Schnirelman و بررسی شرایط آن نتیجه می شود.

اگر X یک فضای باناخ حقیقی و انعکاسی با بعد نامتناهی، و F,G دو تابع روی X باشند. برای ثابت $\alpha>0$، مسئله مقدار ویژه

$$F'(u)=\lambda G'(u) \qquad u\in N_\alpha,\lambda\in\mathbb{R} \qquad (۲.۱)$$

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 40J40; Secondary 47H05, 47J25, 47J20.

واژگان کلیدی. مقدار ویژه اصلی، نامساوی پوانکاره ، اصل Ljusternik–Schnirelman .

* سخنران

که $N_\alpha := \{u \in X; G(u) = \alpha\}$ مجموعه تراز G است و

الف) تابعک های $F, G : X \to \mathbb{R}$، تابعک هایی زوج در $C^1(X, \mathbb{R})$ باشند.

ب) F' پیوسته قوی باشد و از $F(u) \neq 0$ برای $u \in \overline{co}N_\alpha$، نتیجه شود $F'(u) \neq 0$.

ج) عملگر G' روی مجموعه های کراندار، پیوسته یکنواخت باشد و در شرط $(S)_1$ صدق کند.

د) مجموعه تراز N_α کراندار باشد و برای $u \neq 0$ داشته باشیم:

$$\langle G'(u), u\rangle > 0, \lim_{t\to+\infty} G(tu) = +\infty, \quad \inf_{u\in N_\alpha} \langle G'(u), u\rangle > 0$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathcal{A}_n$ را خانواده همه زیرمجموعه های متقارن و فشرده K از N_α که $gen(K) \geq n$ باشد و $F(u) > 0$ می گیریم، و تعریف می کنیم:

$$\pm c_n = \begin{cases} \sup_{K\in\mathcal{A}_n} \inf_{u\in K} \pm F(u) & \text{اگر } \mathcal{A}_n \neq \emptyset \\ 0 & \text{اگر } \mathcal{A}_n = \emptyset \end{cases}$$

برای $n = 1, 2, ...$ و

$$\chi_\pm := \begin{cases} \sup\{n \in \mathbb{N} : \pm c_n > 0\} & \text{اگر } c_1 > 0 \\ 0 & \text{اگر } c_1 = 0 \end{cases}$$

قضیه ۱.۱. (Ljusternik-Schnirelman)[۴] با فرض برقراری شرایط (الف-د) احکام زیر برقرار است:

۱) وجود مقادیر ویژه: اگر $\pm c_n > 0$ ، (+ یا -) در آن صورت (۲.۱) دارای زوج $(u_n, -u_n)$ با مقدار ویژه $\lambda_n \neq 0$ و $F(u_n) = c_n$ است.
۲) چندگانگی: (۲.۱) ، حداقل دارای $\chi_+ + \chi_-$ زوج $(u, -u)$ از توابع ویژه با مقادیر ویژه مخالف صفر است.

۳) سطوح بحرانی: $\pm\infty > \pm c_1 \geq \pm c_2 \geq ... \geq 0$ و $c_n \to 0$ بگونه ای که $n \to \infty$.

۴) نامتناهی مقدار ویژه: اگر $\chi_+ = \infty$ یا $\chi_- = \infty$ و $F(u) = 0$ ، برای $u \in \overline{co}N_\alpha$ نتیجه دهد که $\langle F'(u), u\rangle = 0$، در آن صورت دنباله نامتناهی (λ_n) از مقادیر ویژه متمایز برای (۲.۱) وجود دارد که $\lambda_n \to 0$.
۵) همگرایی ضعیف توابع ویژه: اگر از $F(u) = 0, u \in \overline{co}N_\alpha$ نتیجه شود، $u = 0$ در آن صورت $\max(\chi_+, \chi_-) = +\infty$ و یک دنباله (u_n, λ_n) از جواب های ویژه (۲.۱) وجود دارد که $u_n \rightharpoonup 0, \lambda_n \to 0$ و $\lambda_n \neq 0$ برای هر n .

۲. کران بالا برای λ_1

گزاره ۱.۲. (نامساوی پوانکاره در $\dot{W}_{1,p}(\Omega)$) فرض کنید مجموعه باز $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ دارای عرض متناهی d باشد، یعنی بین دو ابر صفحه موازی با فاصله d قرار گیرد، و $1 \leq p < \infty$. در آن صورت برای هر داریم:

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq \frac{d^p}{p} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx.$$

برهان. بدون کاسته شدن از کلیت فرض می کنیم Ω بین ابر صفحه های $x_N = 0$ و $x_N = d$ قرار دارد. لذا برای $u \in C_c^{\infty}(\Omega)$ داریم:

$$\begin{aligned} |u(x', x_N)| = |u(x', x_N) - u(x', 0)| &= \left| \int_0^{x_N} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t) dt \right| \\ &\leq x_N^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه تونیلی بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1} \times [0,d]} |u(x', x_N)|^p \, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^d x_N^{\frac{p}{q}} \int_0^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t) \right|^p dt dx_N dx' \\ &= \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(y) \right|^p dy \int_0^d x_N^{p-1} dx_N = \frac{|d|^p}{p} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(y) \right|^p dy \\ &\leq \frac{|d|^p}{p} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \, dx. \end{aligned}$$

□

اکنون با توجه به تعریف c_n و بکار گیری نامساوی فوق می توانیم کران بالایی برای اولین مقدار ویژه مسئله بدست آوریم.

گزاره ۲.۲. با فرض $p \geq q$ برای مقدار ویژه اصلی مسئله (۱.۱) داریم:

$$\lambda_1 \leq \frac{d^p}{q}.$$

برهان. اگر K زیرمجموعه ای متقارن و فشرده از N_α باشد، $c_1=\sup_{K\in\mathcal{A}_1}\inf_{u\in K}F(u)$ ، اما با نامساوی پوانکاره برای هر $u\in \dot{W}_{1,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}F(u)=&\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{p}dx\le \frac{1}{p}\left(\frac{d^p}{p}\int_\Omega|\nabla u|^p\right)\\ \le&\frac{1}{p}\left(\frac{d^p}{p}\int_\Omega|\nabla u|^p+\frac{d^p}{q}\int_\Omega|\nabla u|^q\right)\\ =&\frac{d^p\alpha}{p},\end{aligned}$$

بنابراین $c_1\le\frac{d^p\alpha}{p}$. همچنین اگر

$$F(u)=\int_\Omega\frac{|u|^p}{p},\ G_1(u)=\int_\Omega\frac{|\nabla u|^p}{p},\ G_2(u)=\int_\Omega\frac{|\nabla u|^q}{q},$$

دیده می شود که F',G_1',G_2' توابعی مثبت و همگن بترتیب از درجه $p-1,p-1,q-1$ هستند. بنابراین

$$F(u)=\int_0^1\langle F'(tu),u\rangle\,dt=\frac{\langle F'(u),u\rangle}{p}$$

و به طور مشابه برای توابع $G_1(u),G_2(u)$. اکنون اگر (u_1,λ_1) ، یک مقدار ویژه از (۱.۱) با $G(u_1)=\alpha$ باشد ، داریم:

$$\begin{aligned}F'(u_1)=&\lambda_1\left[G_1'(u_1)+G_2'(u_1)\right]\ \Rightarrow\\ \langle F'(u_1),u_1\rangle=&\lambda_1\left[\langle G_1'(u_1),u_1\rangle+\langle G_2'(u_1),u_1\rangle\right]\ \Rightarrow\\ \lambda_1=&\frac{\langle F'(u_1),u_1\rangle}{\langle G_1'(u_1),u_1\rangle+\langle G_2'(u_1),u_1\rangle}=\frac{pF(u_1)}{pG_1(u_1)+qG_2(u_1)}\\ \le&\frac{p}{q}\frac{c_1}{\alpha},\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $c_1\le\frac{d^p}{p}$ بدست می آوریم $\lambda_1\le\frac{d^p}{q}$. □

برای حالت خاص $q=p=2$ بدست می آوریم $\lambda_1\le\frac{d^2}{2}$ ، که یک نتیجه مناسب و خوب به حساب می آید.

مراجع

1. D. Valtorta, *sharp estimate on the first eigenvalue of the p-laplacian on compact manifold with nonnegative ricci curvature*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications **13** (2012), 4974-4994.
2. L. Esposito-C. Nitsch- C. Trombetti, *Best constants in Poincaré inequalities for convex domains*, J.Convex Anal. **20** (2013).
3. S. Azami- L. Liu, *Eigenvalues variation of the p-Laplacian under the Yamabe flow*, J. of Diff. Equ. and App. **3** (2016).

4. E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications vol. 2B, Nonlinear monoton operators*, Springer Publishers, Berlin, 1990.