۷ امین سمینار آنالیز تابعی و کاربردهای آن
۱۰ و ۱۱ اسفند ۱۴۰۱
دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
قزوین، ایران

نتایجی در گروه-قابها

عباس عسکری‌زاده [1] *

[1]گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان
a.askari@vru.ac.ir

چکیده. فرض کنید H یک فضای هیلبرت و G یک گروه متناهی باشد. در این مقاله، گروه-قابها را برای H تحت گروه G مورد بررسی قرار میدهیم.

۱. پیش‌گفتار

بعد از اینکه قابها در سال ۱۹۵۲ توسط دافین و شفر در مقاله‌ای تحت عنوان "یک رده از سری‌های فوریه غیرهارمونیک" معرفی شدند [؟] ، بسیاری از محققان و پژوهشگران در نظریه قابها کار کرده‌اند. [؟، ؟، ؟، ؟] فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد و $\mathcal{I}$ یک مجموعه اندیس شمارا. خانواده $\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ را برای H قاب می‌گویند اگر ثابت‌های مثبت و متناهی A و B وجود داشته باشند بطوریکه برای هر $x \in H$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$A \parallel x \parallel^2 \leq \sum_{i\in\mathcal{I}} | \langle x, \phi_i \rangle |^2 \leq B \parallel x \parallel^2 .$$

در این قسمت به تعاریف و نتایجی که در طول این مقاله به آنها نیاز داریم اشاره خواهیم کرد [؟]. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و G یک گروه باشد.

(۱): می گویند V یک $\mathbb{F}G$ -مدول است اگر یک عمل خطی از G روی V مانند $g \mapsto gv$ وجود داشته باشد، بطوریکه برای هر $u, v \in V$ ، هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و هر $g, h \in G$ داشته باشیم:

(الف): $gv \in V, (gh)v = g(hv), 1v = v$.

(ب): $g(\alpha u + \beta v) = \alpha(gu) + \beta(gv)$.

(۲): یک زیرفضای W از یک $\mathbb{F}G$ -مدول V یک $\mathbb{F}G$- زیر مدول از V گفته می شود اگر G- پایا باشد، یا به عبارت دیگر

$$gw \in W, \quad \forall g \in G, \forall w \in W.$$

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 15A04; Secondary 15A21.

واژگان کلیدی. قاب، گروه، گروه-قاب .

* سخنران

.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. قاب $\{\phi_g\}_{g\in G}$ برای فضای هیلبرت H یک گروه-قاب است اگر نمایش $\rho : G \to GL(H)$ موجود باشد بطوریکه

$$g\phi_h := \rho(g)\phi_h = \phi_{gh},$$

برای هر $g, h \in G$.

گزاره ۲.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و قاب $\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک گروه-قاب برای فضای هیلبرت H باشد با نمایش یکانی $\rho : G \to GL(H)$. در اینصورت ρ منحصر بفرد است.

$\{\phi_g\}_{g\in G}$

تعریف ۳.۲. فرض کنید $\rho : G \to GL(H)$ یک نمایش یکانی برای گروه متناهی G باشد و $\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک دنباله از بردارها در فضای هیلبرت H باشد. زیر مجموعه $\mathcal{X}_\rho$ از G را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{X}_\rho := \{g \in G : \rho(g)\phi_h = \phi_{gh}, \quad \forall h \in G\}.$$

توجه ۴.۲. واضح است که $\mathcal{X}_\rho$ یک زیرگروه از G می باشد و اگر $\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک گروه-قاب برای H باشد آنگاه $\mathcal{X}_\rho = G$.

اکنون قضیه مهم زیر را بیان می کنیم.

قضیه ۵.۲. فرض کنید $\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک دنباله از بردارها در فضای هیلبرت H باشد و همچنین ρ_1، ρ_2 دو نمایش یکانی برای گروه G باشند بطوریکه $\mathcal{X}_{\rho_1}\mathcal{X}_{\rho_2} = G$ و $\mathcal{X}_{\rho_1} \cap \mathcal{X}_{\rho_2} = \{e\}$. در اینصورت $\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک گروه-قاب برای H می باشد.

برهان. فرض کنید ρ_1 و ρ_2 دو نمایش برای گروه G که در شرایط زیر صدق کنند:

$$\mathcal{X}_{\rho_1}\mathcal{X}_{\rho_2} = G, \quad \mathcal{X}_{\rho_1} \cap \mathcal{X}_{\rho_2} = \{e\}.$$

در اینصورت نمایش یکانی ρ برای گروه G را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\rho : G \longrightarrow U(H), \quad \rho(g) := \rho(g_1) \circ \rho(g_2),$$

جایی که $g = g_1g_2$. حال نشان می دهیم $\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک گروه-قاب برای H می باشد. با توجه به فرضهای قضیه هر عضو گروه G نمایشی بصورت $g = g_1g_2$ دارد که در آن $g_1 \in \mathcal{X}_{\rho_1}$ و $g_2 \in \mathcal{X}_{\rho_2}$. پس برای هر $g, h \in G$ داریم

$$\begin{aligned}
\rho(g)\phi_h &= [\rho(g_1) \circ \rho(g_2)]\, \phi_h \\
&= \rho(g_1)\, [\rho(g_2)\phi_h] \\
&= \rho(g_1)\phi_{g_2h} \\
&= \phi_{g_1g_2h} \\
&= \phi_{gh}.
\end{aligned}$$

در نتیجه $\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک گروه-قاب برای فضای هیلبرت H می باشد و اثبات قضیه به اتمام می رسد. $\square$

گزاره ۶.۲. فرض کنید $\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک دنباله از بردارها در فضای هیلبرت H باشد و همچنین ρ نمایش یکانی برای گروه G باشد. در اینصورت برای هر $h \in H$ مجموعه $\mathcal{X}_\rho$ زیر فضای برداری از H می باشد.

نتیجه ۷.۲. فرض کنید $\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک دنباله از بردارها در فضای هیلبرت H باشد و همچنین $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ نمایش های یکانی برای گروه G باشند بطوریکه $\mathcal{X}_{\rho_1}\mathcal{X}_{\rho_2}\ldots\mathcal{X}_{\rho_k} = G$ و برای هر $1 \le i, j \le k$ که $i \neq j$ داشته باشیم $\mathcal{X}_{\rho_i}\cap\mathcal{X}_{\rho_j} = \{e\}$. در اینصورت $\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک گروه-قاب برای H می باشد.

اکنون با یک مثال نشان می دهیم که عکس قضیه ؟؟ درست نیست.

مثال ۸.۲. فرض کنید $\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک گروه-قاب برای فضای هیلبرت H باشد، که در آن $G = Q_8$، جایی که Q_8 گروه کواترنیون ها میباشد، یعنی $Q_8 = \{\pm1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. اما Q_8 را نمی توان بصورت زیر نوشت

$$Q_8 = HK, \quad H \cap K = \{e\},$$

که در آن H و K زیرگروه های G می باشند. بنابراین عکس قضیه ؟؟ الزاما برقرار نیست.

قضیه ۹.۲. $\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک دنباله از بردارها در فضای هیلبرت H باشد و همچنین ρ_1 ، ρ_2 دو نمایش یکانی برای گروه G باشند بطوریکه $\mathcal{X}_{\rho_1}\mathcal{X}_{\rho_2} = G$ و $\mathcal{X}_{\rho_1}\cap\mathcal{X}_{\rho_2} = \{e\}$. در اینصورت $\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک گروه-قاب برای H می باشد.
$\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک دنباله از بردارها در فضای هیلبرت H باشد و همچنین $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ نمایش های یکانی برای گروه G باشند بطوریکه $\mathcal{X}_{\rho_1}\mathcal{X}_{\rho_2}\ldots\mathcal{X}_{\rho_k} = G$ و برای هر $1 \le i, j \le k$ که $i \neq j$ داشته باشیم $\mathcal{X}_{\rho_i}\cap\mathcal{X}_{\rho_j} = \{e\}$. در اینصورت $\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک گروه-قاب برای H می باشد

اکنون این سوال مطرح می شود که اگر $\{\phi_g\}_{g\in G}$ قاب برای فضای هیلبرت H باشد، آیا زیرگروه سره ای از G مانند G_1 یافت می شود که دنباله $\{\phi_g\}_{g\in G_1}$ یک گروه-قاب برای H باشد.

توجه ۱۰.۲. فرض کنید $\{\phi_g\}_{g\in G}$ گروه-قاب برای فضای هیلبرت H باشد. مجموعه Ψ، شامل برخی از زیر گروه های G را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\Psi = \{K \leqslant G : \overline{span}\{\phi_g\}_{g\in K} = H\}.$$

چون هر زنجیر در Ψ کران پایین دارد، بنابراین با استفاده از لم زرن می توان نتیجه گرفت مجموعه Ψ عضوی مینیمال مانند K' دارد. در نتیجه دنباله $\{\phi_g\}_{g\in K'}$ مستقل خطی است. زیرا اگر $\{\phi_g\}_{g\in K'}$ مستقل خطی نباشد، برداری مانند ϕ_{g_0} که $g_0 \in K'$ وجود دارد به طوریکه

$$\phi_{g_0} = \sum_{g\in K', g\neq g_0} \phi_g.$$

حال زیرگروه K'' را بصورت زیر می سازیم:

$$K'' =< g : g \in K', g \neq g_0 > .$$

بنابراین

$$K'' \leqslant K', \quad \overline{span}\{\phi_g\}_{g\in K''} = H.$$

که این متناقض است با مینیمال بودن K'. پس نتیجه می گیریم که اگر K' عضو مینیمال Ψ باشد، دنباله $\{\phi_g\}_{g\in K'}$ در H مستقل خطی است.

توجه ۱۱.۲. اگر K زیر گروهی از گروه G باشد، در این صورت $W = \overline{\text{span}}\{\phi_g\}_{g\in K}$ زیر فضایی از فضای هیلبرت H می باشد. اکنون این سوال مطرح می شود که اگر $\{\phi_g\}_{g\in G}$ یک G- قاب برای H باشد، در مورد فضای خارج قسمتی $\frac{H}{W}$ چه می توان گفت؟ جایی که $W = \overline{\text{span}}\{\phi_g\}_{g\in K}$ و K زیر گروهی از G می باشد.

قضیه ۱۲.۲. فرض کنید A_{mn}, B_{pq} جی-ماتریس باشند. در این صورت ضرب تانسوری A در B یعنی $A \otimes B$ نیز یک جی-ماتریس است.

۳. جمع مستقیم

در این بخش به بررسی ارتباط جمع های مستقیم و جی-قابها می پردازیم.

قضیه ۱.۳. فرض کنید برای هر i که $1 \leq i \leq k$، V_i یک $\mathbb{F}G_i$ -مدول باشد جایی که G_i ها گروه های متناهی هستند. در اینصورت $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$ یک G -مدول می باشد، جاییکه $G = G_1G_2\cdots G_k$.

مراجع

1. P. G. Casazza, and G. Kutyniok, Finite frames, Theory and Applications, Birkhauser, Boston (2012).
2. O. Christensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases, 2nd edn, Birkhauser, Boston, (2015).
3. I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, CBMS Series, SIAM, (1992).
4. R.J. Duffin and A.C. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc., 72 (1952), 341-366.
5. D. G. Han, K. Kornelson, D. Larson and E. Weber, Frames for undergraguates, Student Mathematical Library, vol. 40, American Mathematical Society, Providence (2007).
6. S. Waldron, An Introduction to Finite Tight Frames, Springer Science, New York, 2018.