۷ امین سمینار آنالیز تابعی و کاربردهای آن
۱۰ و ۱۱ اسفند ۱۴۰۱
دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
قزوین، ایران

حل عددی مسائل الاستیسیته غیرخطی در حساب تغییرات

مژگان تقوی [1] * و محمدصادق شاهرخی دهکردی [2]

[1] گروه ریاضی کاربردی و صنعتی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی
mo_taghavi@sbu.ac.ir
[2] گروه ریاضی کاربردی و صنعتی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی
M_Shahrokhi@sbu.ac.ir

چکیده. در این مقاله با استفاده از روش عددی، تقریبی از مینیمم‌کننده‌های مسائل تغییراتی در الاستسیته غیرخطی بدست می‌آوریم. برای این منظور معادلات اویلر-لاگرانژ مربوط به تابعک انرژی را به وسیله روش طیفی گسسته سازی کرده و دستگاه جبری بدست آمده را حل می کنیم. در آخر با استفاده از نتایج عددی کارایی روش موردنظر را نشان می دهیم.

۱. پیش‌گفتار

فرض کنید Ω یک دامنه کراندار باشد. مساله تغییراتی زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbb{F}[u,\Omega] := \int_\Omega W(\nabla u(x))dx. \tag{۱.۱}$$

تابعک انرژی بالا مربوط به مسائل الاستیسیته غیرخطی می‌باشند. ما به دنبال یافتن مینیمم کننده این تابعک روی مجموعه ای از توابع که به فرم

$$\mathcal{A}_p(\Omega) := \Big\{ u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n) : u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \det\nabla u > 0 \ \text{-a.e} \Big\},$$

تعریف می شوند، هستیم. در تابعک انرژی (۱.۱) ، $W(\nabla u(x)) : M_+^{n\times n} \to \mathbb{R}^+$ تابع چگالی انرژی ذخیره شده است، که در آن $M^{n\times n}$ مجموعه ای از ماتریس های $n\times n$ با دترمینان مثبت هستند و در شرط مرزی $u=\varphi(x)$ صدق می کنند. هم چنین $h \in C^2(0,\infty)$ یک تابع محدب است که در شرایط زیر برای آن برقرار است:

[H۱] $h : (0,\infty) \to (0,\infty)$

[H۲] $\lim_{t\downarrow 0} h(t) = \lim_{t\uparrow\infty} \frac{h(t)}{t} = \infty$

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 49M25; Secondary 49M37.
واژگان کلیدی. مسائل تغییراتی، معادلات اویلر-لاگرانژ، گسسته‌سازی، روش طیفی .
* سخنران

در اینجا $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ را یک مجموعه‌ی باز و کراندار به صورت $\{x \in \mathbb{R}^2 | a < |x| < b\}$ درنظر می گیریم که $0 < a < b < \infty$ است. در مقاله‌های [۱، ۵، ۲، ۳] از روش عناصرمتناهی با شبکه بندی‌های متفاوت برای حل عددی مسائل تغییراتی (۱.۱) که دارای یک یا چند حفره هستند استفاده شده‌است. هم‌چنین همگرایی، کارآمدی و موثر بودن این روش‌ها بررسی شده است. تحلیل و بررسی نتایج عددی در این مقالات ما را به استفاده از روش های عددی برای بدست آوردن تقریبی از مینیمم کننده های مسائل تغییراتی دیگر ترغیب کرد. در این مقاله تابع چگالی انرژی موردنظر از مدل اسکرم [۴] بدست می آید که تاکنون روش عددی برای آن مورد استفاده قرار نگرفته است و به صورت زیر بیان می شود.

$$W(\nabla u(x)) := | \wedge^2 \nabla u|^p + h(\det \nabla u). \tag{۲.۱}$$

در ادامه مینیمم‌کننده‌های این مساله را با استفاده از روش طیفی تقریب می زنیم که برای این‌کار ابتدا با استفاده از مقادیر منفرد ماتریس ∇u برای تابع چگالی (۲.۱) ، مساله تغییراتی (۱.۱) را به فرم دیگری بازنویسی می‌کنیم.

۲. دست‌آوردهای پژوهش

در این بخش روش عددی موردنظر را بر روی دستگاه معادلات اویلر-لاگرانژ که به فرم قطبی بیان شده‌اند، پیاده‌سازی می‌کنیم. حال فرم قطبی مساله تغییراتی که به صورت

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u, \Omega] &= \int_{\tilde{\Omega}} \Big(F(g(P, Q)) + h(d((P, Q))\Big) \mu(\rho) d\rho d\varphi \\ &=: \mathbb{F}[P, Q] \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

می‌باشد را درنظر بگیرید که در آن $\mu(\rho) := \dfrac{(b^2 - a^2) + (b - a)^2 \rho}{4}$ و $\tilde{\Omega}$ فرم استاندارد Ω می‌باشد. معادلات اویلر-لاگرانژ را نسبت به متغیرهای (P, Q) بدست می‌آوریم. توابع هموار $(\bar{P}, \bar{Q})$ که روی مرز صفر هستند را در نظر بگیرید. حال معادلات اویلر-لاگرانژ تابعک انرژی $\mathbb{F}$ به فرم زیر محاسبه می‌شوند:

$$\int_{\tilde{\Omega}} f_1(P, Q, \bar{P}) d\rho d\varphi = 0, \qquad \int_{\tilde{\Omega}} f_2(P, Q, \bar{Q}) d\rho d\varphi = 0. \tag{۲.۲}$$

توجه کنید که در آن f_1 و f_2 به صورت

$$\begin{aligned} f_1 = \bar{P}\Big\{ &\frac{4}{\mu(\rho)} F'(g) P \Big[Q_\rho^2 \big(P_\varphi^2 + P^2 (Q_\varphi + 1)^2 \big) + \\ &(Q_\varphi + 1)^2 (P_\rho^2 + P^2 \psi_\rho^2) - Q_\rho (Q_\varphi + 1) \Big] + h'(d) P_\rho \times \\ &(Q_\varphi + 1) \Big\} + (\bar{P})_\rho \Big\{ \frac{4}{\mu(\rho)} F'(g) P^2 \Big[P_\rho (Q_\varphi + 1) - \\ &P_\varphi Q_\varphi)(Q_\varphi + 1) \Big] + h'(d) P (Q_\varphi + 1) \Big\} - (\bar{P})_\varphi \Big\{ \frac{4}{\mu(\rho)} \times \\ &F'(g) \Big[P_\varphi (P_\rho^2 + P^2 \psi_\rho^2) - P_\rho \Big] + h'(d) Q_\rho \Big\}, \end{aligned}$$

و

$$f_2 = (\bar{Q})_\rho \Big\{ \frac{2}{\mu(\rho)} F'(g) \Big[2P^2\psi_\rho \big(P_\varphi^2 + P^2(Q_\varphi+1)^2\big) - P^2(Q_\varphi+1)\Big] - h'(d)P_\varphi P \Big\} + (\bar{Q})_a \Big\{ \frac{2}{\mu(\rho)} F'(g) \times \Big[2\Gamma^2(Q_\varphi+1)(P_\rho^2 + P^2\psi_\rho^2) - P^2\psi_\rho \Big] + h'(d)PP_\rho \Big\},$$

بدست می آیند. در این قسمت روش طیفی را بر روی معادلات اویلر-لاگرانژ (۲.۲) پیاده سازی می کنیم. برای این منظور تابع $P(\rho,\varphi)$ به صورت

$$P^{N,M} := P^{N,M}(\rho,\varphi) = \sum_{j=0}^{M} \Big[\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}} \alpha_{i,j}\cos(i\varphi) + \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} \beta_{i,j}\sin(i\varphi) \Big] l_j(\rho), \qquad (۳.۲)$$

و به طور مشابه تابع $Q(\rho,\varphi)$ را به فرم

$$Q^{N,M} := Q^{N,M}(\rho,\varphi) = \sum_{j=0}^{M} \Big[\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}} \xi_{i,j}\cos(i\varphi) + \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} \eta_{i,j}\sin(i\varphi) \Big] l_j(\rho), \qquad (۴.۲)$$

بیان می کنیم، که در آن $l_j(\rho)$ چندجمله‌ای لاگرانژ می باشد. در گام بعدی با استفاده از روش های انتگرال‌گیری عددی مناسب و اعمال شرایط مرزی بر آن یک دستگاه معادلات جبری بدست می‌آوریم که با حل آن تقریبی از مجهولات $(P^{N,M}, Q^{N,M})$ بدست می آید. در ادامه با بیان یک مثال کارایی روش ارائه شده را بررسی می کنیم.

قضیه ۱.۲. مساله تغییراتی $\mathbb{F}[P^{N,M}, Q^{N,M}]$ را درنظر بگیرید. اگر $(M,N) \to +\infty$ آن‌گاه تابعک انرژی $\mathbb{F}[P^{N,M}, Q^{N,M}]$ به $\mathbb{F}[P,Q]$ همگرا است.

مثال ۲.۲. در تابع چگالی (۲.۱) فرض کنید $p = \frac{3}{2}$ و در دامنه Ω، $b = 1$ باشد. هم‌چنین تابع محدب $h(t) = 2^{-\frac{1}{4}}\big(\frac{(t-1)^2}{2} + \frac{1}{t}\big)$ را درنظر می‌گیریم. جدول زیر خطای تابعک انرژی (۱.۲) را با استفاده از روش ارائه شده برای $a = 10^3$ نشان می دهد.

جدول ۱: خطای تابعک انرژی $\mathbb{F}[\cdot;\tilde{\Omega}]$ با $a = 10^{-3}$

M	24	32	40	48
$a = 10^{-3}$	$1.7862e-04$	$3.965e-04$	$8.8149e-04$	$9.4425e-05$

مراجع

1. Y. Lian, Z. Li, A dual-parametric finite element method for cavitation in nonlinear elasticity , *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. **236**,2011, pp. 834–842.
2. Y. Lian, Z. Li, A numerical study on cavitation in nonlinear elasticity-defects and configurational forces *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. **21**, 2011, pp. 2551-2574.
3. W. Huang, Z. Li, A mixed finite element method for multi-cavity computation in incompressible nonlinear elasticity , *J. Comput Math*, Vol. **37**, 2019, pp. 611–630.
4. R. Slobodeanu, On the geometrized Skyrme and Faddeev models, *J. Geometry and Physics*,Vol. *60*,2010, pp. 643–660.
5. C. Su, Z. Li, Error analysis of a dual-parametric bi-quadratic FEM in cavitation computation in elasticity ,*SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. *53*,2015, pp. 1629–1649.