مینیمم‌کننده‌های موضعی در حساب تغییرات کسری

فاطمه طوس‌نژاد [۱] * و محمد صادق شاهرخی دهکردی [۲]

[۱] گروه ریاضی کاربردی و صنعتی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی
f_toosnezhad@sbu.ac.ir
[۲] گروه ریاضی کاربردی و صنعتی ، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی
m_ shahrokhi@sbu.ac.ir

چکیده. حساب تغییرات کسری یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات می‌باشد، که در سال های اخیر بسیار مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است. ما در این مقاله قصد داریم، اکسترمم‌های موضعی تابعی انرژی را برای حالتی که تابعی شامل مشتقات کسری از نوع کاپوتو باشد، در بعد دو به کمک روش مستقیم و معادله اولر-لاگرانژ مورد بررسی قرار دهیم.

۱. پیش‌گفتار

فرض کنید $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^۲ : a < |x| < b\}$ دامنه‌ای با مرز لیپ شیتز باشد، تابعی انرژی

$$\mathbb{E}[u, \Omega)] = \int_\Omega \frac{۱}{۲}|\nabla u|^۲ + \phi(\det \nabla u)dx,$$

را روی فضای توابع قابل قبول

$$\mathcal{A}(\Omega) = \left\{u \in W^{۱,۲}(\Omega, \mathbb{R}^۲) : u|_{\partial\Omega} = x, \det \nabla u > ۰ \text{ a.e. in } \Omega \right\},$$

در نظر بگیرید. همچنین $\phi : (۰, \infty) \to (۰, \infty)$ که در ضابطه‌ی تابعی حضور دارد، یک تابع محدب است و در فضای $C^۲(۰, \infty)$ قرار دارد.

تابع u را به فرم کلی مختصات قطبی

$$(r, \theta) \longmapsto (\rho(r, \theta), \varphi(r, \theta))$$

انتقال می‌دهیم، سپس مشتقات جزیی مرتبه‌ی صحیح را به مشتقات کسری جزیی کاپوتو از مرتبه‌ی $۰ < \alpha < ۱$ تبدیل می‌کنیم(به منظور مطالعه در زمینه حساب کسری مرجع [۲]

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 47J30; Secondary 47H10, 47H05.

واژگان کلیدی. حساب تغییرات کسری، روش مستقیم، مشتق کسری کاپوتو، ،معادله اولر- لاگرانژ .

* سخنران

پیشنهاد می‌شود). اگر تابع u در شرایط زیر صدق کند، آن‌گاه در فضای توابع $\mathcal{A}(\Omega)$ قرار می‌گیرد

$$\rho(r,\theta)=\rho(r),\ \ \rho(a)=a,\ \ \rho(b)=b,\ \ {}_{a}^{C}\mathcal{D}_{r}^{\alpha}\rho>0$$
$$\varphi(r,\theta)=\theta+g(r)$$

به طوری که $g\in W^{1,2}(a,b)$. با اعمال این شرایط، تابعی انرژی به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$\mathbb{E}(\rho,g)=\int_{a}^{b}\left(\pi\big(({}_{a}^{C}\mathcal{D}_{r}^{\alpha}\rho)^{2}+\rho^{2}(({}_{a}^{C}\mathcal{D}_{r}^{\alpha}g)^{2}+\frac{c}{r^{2}})\big)+\Phi(\frac{\rho}{r}{}_{a}^{C}\mathcal{D}_{r}^{\alpha}\rho)\right)rdr, \tag{1.1}$$

که در آن تابع Φ ویژگیهای تابع ϕ را به ارث می‌برد و ثابت c وابسته به α همواره مثبت است. هدف ما در این مقاله تعیین مینیمم‌های تابعی انرژی $\mathbb{E}$ روی فضای توابع قابل قبول زیر می‌باشد

$$\mathfrak{B}=\left\{\begin{array}{l}(\rho,g,\alpha):\\ 0<\alpha<1,\\ \rho\in W^{1,2}[a,b],\\ \rho(a)=a,\ \rho(b)=b,\ {}_{a}^{C}\mathcal{D}_{r}^{\alpha}\rho>0\ a.e,\\ {}_{a}^{C}\mathcal{D}_{r}^{\alpha}\rho,\ {}_{r}^{C}\mathcal{D}_{b}^{\alpha}g\in L^{2}[a,b],\\ g\in W^{1,2}[a,b],\ {}_{a}^{C}\mathcal{D}_{r}^{\alpha}g,\ {}_{r}^{C}\mathcal{D}_{b}^{\alpha}g\in L^{2}[a,b].\end{array}\right\}$$

اگر $\alpha=1$ آن‌گاه این مسئله، حالت خاصی از مسئله مطرح شده‌ی مقاله [۳] می‌باشد، به طوری که مینیمم‌کننده‌هایی برای تابعی از کلاس خاصی از توابع با عنوان تاب‌های تعمیم یافته موجود است.

۲. دست‌آوردهای پژوهش

یکی از راه های پیدا کردن اکسترمم‌های تابعی بررسی جواب‌های معادلات اولر - لاگرانژ مربوط به تابعی می‌باشد، لذا در این بخش ابتدا معادلات اولر-لاگرانژ تابعی $\mathbb{E}$ را روی فضای توابع قابل قبول $\mathfrak{B}$ بدست می‌آوریم. سپس به کمک روش مستقیم نشان می‌دهیم مینیمم‌کننده‌های تابعی روی هر کدام از کلاس‌های خاص هموتوپی وجود دارد. این کلاس‌ها فضای توابع مفروض را افراز می‌کنند.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $(\rho,g)\in\mathfrak{B}$ به طوری که ${}_{a}^{C}\mathcal{D}_{r}^{\alpha}g\in C^{1}(a,b)$ ، $\rho\in C^{1}(a,b)$ و ${}_{a}^{C}\mathcal{D}_{r}^{\alpha}\rho\in C^{1}(a,b)$. همچنین با فرض $\mathbb{E}(\rho,g)<\infty$، معادلات اولر-لاگرانژ محدود به $\mathbb{E}$ روی فضای توابع مفروض $\mathfrak{B}$ در(ρ,g) به شکل زیر می‌شود

$${}_{r}\mathcal{D}_{b}^{\alpha}(\rho^{2}r\,{}_{a}^{C}\mathcal{D}_{r}^{\alpha}g)=0$$
$$-{}_{r}\mathcal{D}_{b}^{\alpha}(2\pi r\,{}_{a}^{C}\mathcal{D}_{r}^{\alpha}\rho+\rho\Phi'(\frac{\rho}{r}\,{}_{a}^{C}\mathcal{D}_{r}^{\alpha}\rho))=2\pi\rho(r\,({}_{a}^{C}\mathcal{D}_{r}^{\alpha}g)^{2}+\frac{c}{r})$$
$$+{}_{a}^{C}\mathcal{D}_{r}^{\alpha}\rho\,\Phi'(\frac{\rho}{r}\,{}_{a}^{C}\mathcal{D}_{r}^{\alpha}\rho) \tag{1.2}$$

برهان. از آن جایی که (ρ, g) تابعی ۱.۱ را مینیمم می‌کنند، لذا برای $\varepsilon > 0$ دلخواه و تابع $h \in C^1[(a,b), \mathbb{R}^2]$ که مقدار آن روی مرز (a,b) صفر می‌شود، داریم

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathbb{E}(\rho + \varepsilon h_1, g + \varepsilon h_2)\bigg|_{\varepsilon=0} = 0$$

اکنون به کمک خاصیت خطی بودن عملگر مشتق کسری کاپوتو و قاعده‌ی انتگرال‌گیری جزء به جزء [۲] برای حساب کسری و قضیه اساسی حساب تغییرات به معادلات ۱.۲ می‌رسیم.
□

در ادامه با کمک نامساوی پوانکاره در حساب کسری [۱] نشان می‌دهیم که تابعی ۱.۱ کوریسیو می‌باشد. سپس به کمک آن و خاصیت چند محدبی تابع زیر انتگرال در ضابطه‌ی $\mathbb{E}$ وجود منیمم‌کننده‌ها را ثابت می‌کنیم

لم ۲.۲. تابعی $\mathbb{E}$ روی فضای توابع $\mathfrak{B}$ از پایین کراندار است و ثابت $l = l(a,b,\alpha)$ وجود دارد، به طوری که

$$\mathbb{E}(\rho, g) \geq l[\| g \|^2_{L^2} + (\| \rho(r) \|_{L^2} + a(b-a)^{\frac{1}{2}})^2]$$

برهان. با توجه به اینکه برای هر $(\rho, g) \in \mathfrak{B}$ روی بازه‌ی $[a,b]$ تابع $a \leq \rho \leq b$ $r \in [a,b]$، همچنین تابع $\Phi \geq 0$ و با کمک نامساوی پوانکاره داریم

$$\mathbb{E}(\rho, g) \geq \frac{(\Gamma(\alpha)^2)(2\alpha - 1)}{(b-a)^{2\alpha}}[\| g \|^2_{L^2} + (\| \rho(r) \|_{L^2} + a(b-a)^{\frac{1}{2}})^2].$$

لذا با انتخاب $l = \frac{(\Gamma(\alpha)^2)(2\alpha-1)}{(b-a)^{2\alpha}}$ لم اثبات می‌شود. □

فضای توابع $\mathfrak{B}$ زیرفضایی بسته از فضای سوبولوف $W^{1,2}(a,b)$ است، بنابراین با توجه به قضیه نشاندن سوبولوف، می‌توان گفت کلاس‌های هموتوپی معرفی شده در مرجع [۳] فضای $\mathfrak{B}$ را نیز افراز می‌کنند. این کلاس‌ها را با نماد $c_m[\mathfrak{B}]$ برای $m \in \mathbb{Z}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۲. تابعی انرژی $\mathbb{E}$ را روی فضای توابع $\mathfrak{B}$ در نظر بگیرید، در این صورت برای هر$m \in \mathbb{Z}$ زوج $(\rho, g) \in c_m[\mathfrak{B}]$ موجود است، به طوری که $\mathbb{E}$ را روی این کلاس هموتوپی مینیمم می‌کنند.

برهان. فرض کنید (ρ_n, g_n) دنباله‌ی مینیمم‌کننده دلخواه $\mathbb{E}$ روی کلاس هموتوپی $c_m[\mathfrak{B}]$ باشد. بنابر لم ۲.۲ دارای زیر دنباله‌ی همگرا می‌باشد، بدون کم شدن از کلیت، دنباله مورد نظر را همین زیردنباله می‌گیریم، لذا داریم

$$\begin{cases} \rho_n \rightharpoonup \rho \quad \text{in} \quad W^{1,2}(a,b) \\ g_n \rightharpoonup g \quad \text{in} \quad W^{1,2}(a,b) \end{cases}$$

با توجه به خطی بودن مشتق کسری کاپوتو و کرانداری تابع ρ

$$\frac{\rho_n}{r} {}^C_a\mathcal{D}^\alpha_r \rho_n \rightharpoonup \frac{\rho}{r} {}^C_a\mathcal{D}^\alpha_r \rho \;\; in \;\; L^2(a,b)$$
$$\rho_n {}^C_a\mathcal{D}^\alpha_r g_n \rightharpoonup \rho {}^C_a\mathcal{D}^\alpha_r g \;\; in \;\; L^2(a,b)$$

از اینکه تابعی $\mathbb{E}$ دارای ویژگی به طور ضعیف پیوسته‌ی پایینی نیز می‌باشد، بنابراین

$$\begin{aligned}\inf_{c_m[\mathcal{B}]} \mathbb{E} &\leq \mathbb{E}(\rho, g)\\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(\rho_n, g_n)\\ &\leq \inf_{c_m[\mathcal{B}]} \mathbb{E}\end{aligned}$$

کلاس‌های هموتوپی زیرفضاهای به طور ضعیف بسته از از فضای سوبولوف $W^{۱,۲}[a,b]$ می‌باشند، بنابراین $(\rho, g) \in c_m[\mathfrak{B}]$. □

مراجع

1. A. Kassymove, M. Ruzhansky, N. Tokmgambetov, B.T. *Torebek, Sobolev, Hardy, Gagliardo–Nirenberg, and Caffarelli–Kohn–Nirenberg-type inequalities for some fractional derivatives* , Banach journal of mathematical for analysis, **15**, (2021), no. 15 , 1–24 .
2. D.Torres, A.B.Malinowska, *Introduction to the fractional calculus of variations*, World Scientific Publishing Company, 2012.
3. M.S. Shahrokhi-Dehkordi, A.Taheri, *Polyconvexity, generalised twists and energy minimizers on a space of self-maps of annuli in the multi-dimensional calculus of variations*, Adv.calc.var., **2**, (2009), 361–330.