۷ امین سمینار آنالیز تابعی و کاربردهای آن
۱۰ و ۱۱ اسفند ۱۴۰۱
دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
قزوین، ایران

ساختار نگهدارنده های خطی وارون روابط مهتری

عرفان یزدان [1] * و علی آرمندنژاد [2]

[1] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

چکیده. در این مقاله قصد داریم مفهوم نگهدارنده های خطی وارون را برای روابط مهتری، مهتری ضعیف و مهتری سطری مورد مطالعه و بررسی قرار دهیم و پیکربندی این نگهدارنده های خطی وارون را برای هرکدام از این روابط بدست آوریم.

۱. پیش‌گفتار

تعریف ۱.۱. [۱] فرض کنیم M_{nm} مجموعه تمام ماتریس های $n \times m$ با درایه های حقیقی باشد. برای هر $A, B \in M_{nm}$ گوییم B مهتر A است و با نماد $A \prec B$ نشان می دهیم هرگاه $A = DB$ که در آن $D \in M_{nn}$ یک ماتریس تصادفی دوگانه است.

تعریف ۲.۱. اگر $A, B \in M_{nm}$ باشند، آنگاه B دارای مهتری جهت دار نسبت به A است و می نویسیم $A \prec_d B$، هرگاه به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $Ax \prec Ay$.

تعریف ۳.۱. [۲] در تعریف ۱.۱ اگر ماتریس تصادفی دوگانه D را با ماتریس سطری تصادفی $R \in M_{nn}$ جایگزین کنیم، گوییم B مهتر سطری A است و با نماد $A \prec_r B$ نشان می دهیم.

تعریف ۴.۱. [۱] اگر $x, y \in \mathbb{R}^n$ دو بردار دلخواه باشند، گوییم y مهتر ضعیف x است و با نماد $x \prec_w y$ نشان می دهیم هرگاه:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow}$$

که در آن $x_i^{\downarrow}$ و $y_i^{\downarrow}$ به ترتیب آرایش نزولی درایه های بردارهای x و y می باشند.

تبدیل خطی $T : M_{nm} \longrightarrow M_{nm}$ را یک نگهدارنده خطی رابطه مهتری گویند هرگاه T دارای ویژگی زیر باشد:

به ازای هر $A, B \in M_{nm}$ اگر $A \prec B$ آنگاه $T(A) \prec T(B)$.

واژگان کلیدی. مهتری، مهتری ضعیف، مهتری سطری، نگهدارنده خطی وارون .

* سخنران

ساختار نگهدارنده های خطی رابطه های مهتری ذکر شده در بالا در [۲] و [۳] مشخص شده اند. در این مقاله ما مفهوم جدید عملگر خطی نگهدارنده وارون را بصورت زیر معرفی نموده و ساختار این عملگرهای خطی را در حالتهای مختلف تعیین می نماییم.

تعریف ۵.۱. عملگر خطی $T : M_{nm} \longrightarrow M_{nm}$ را نگهدارنده خطی وارون رابطه مهتری می گوییم هرگاه T دارای ویژگی زیر باشد:

به ازای هر $A, B \in M_{nm}$ اگر $B \prec A$ آنگاه $T(A) \prec T(B)$.

۲. دست‌آوردهای پژوهش

ابتدا ساختار نگهدارنده خطی وارون را برای بردارهای $\mathbb{R}^n$ تعیین می نماییم.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک عملگر خطی باشد بطوریکه $x \prec y$ نتیجه دهد $T(y) \prec T(x)$. آنگاه بردار $a \in \mathbb{R}^n$ یافت می شود بطوریکه:

$$T(x) = trx.a \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

برهان. طبق تعریف رابطه مهتری $\prec$ برای بردارهای $\mathbb{R}^n$، اگر e_i و e_j دو عضو دلخواه پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ باشند، آنگاه $0 \prec (e_i - e_j)$. با توجه به فرض قضیه داریم:

$$\begin{aligned} 0 \prec (e_i - e_j) \quad &\Rightarrow \quad T(e_i) - T(e_j) \prec 0 \\ &\Rightarrow \quad T(e_i) - T(e_j) = 0 \\ &\Rightarrow \quad T(e_i) = T(e_j) \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

بنابراین اگر $[T]$ ماتریس متناظر با عملگر T باشد آنگاه دارای ستونهای یکسان است و این یعنی بردار $a \in \mathbb{R}^n$ یافت می شود بطوریکه:

$$[T] = [a\, a \cdots a] \Rightarrow T(x) = trx.a \tag{۲.۲}$$

بالعکس اگر $x \prec y$ و $T(x) = trx.a$، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} & x \prec y \Rightarrow trx = try \\ \Rightarrow \quad & T(x) = trx.a = try.a = T(y) \\ \Rightarrow \quad & T(y) \prec T(x). \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

□

اکنون با بهره گیری از نتیجه اصلی قضیه فوق و تعریف ۵.۱ و همچنین شیوه ای مشابه اثبات قضیه ۲ در مقاله [۳]، قصد داریم فرم عملگر خطی نگهدارنده وارون T را برای ماتریس های M_{nm} تعیین نماییم. در اثبات قضیه زیر ما از این موضوع استفاده می کنیم که اگر $A \prec B$ آنگاه $A \prec_d B$ است.

قضیه ۲.۲. فرض کنید $T : M_{nm} \longrightarrow M_{nm}$ یک عملگر خطی باشد. آنگاه موارد زیر باهم معادلند:

الف) T نگهدارنده وارون مهتری جهت دار است.
ب) T نگهدارنده وارون مهتری است.
ج) $T(Y) \prec_d T(X)$ زمانی که $X \prec Y$.
د) اگر x_j ستون j ام ماتریس X باشد، ماتریس های $A_1, \ldots, A_n$ وجود دارند بطوریکه $T(X) = \sum_{j=1}^{n} (trx_j) A_j$.

برهان. ابتدا نگاشت $E_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow M_{nm}$ که $E_j(x) = xe_j^t$ برای $j = 1, \dots, m$ را تعریف می کنیم و سپس قرار می دهیم:

$$T_i^j = E_i^* T E_j$$

و ماتریس X را به فرم ستونی $X = \begin{bmatrix} x_1 | \cdots | x_m \end{bmatrix}$ می نویسیم. آنگاه داریم:

$$T(x_1|\cdots|x_m) = \left[\sum_{j=1}^m T_1^j x_j | \cdots | \sum_{j=1}^m T_m^j x_j\right] \tag{۴.۲}$$

اگر قسمت (ج) قضیه برقرار باشد، داریم:

$$x \prec y \Rightarrow T_i^j x \succ T_i^j y \tag{۵.۲}$$

و از قضیه ۱.۲ نتیجه می شود که باید $T_i^j(x) = trx.a_i^j$. اکنون با قرار دادن $A_j = \begin{bmatrix} a_1^j | \cdots | a_m^j \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{aligned} T(x_1|\cdots|x_m) &= \left[\sum_{j=1}^m T_1^j x_j | \cdots | \sum_{j=1}^m T_m^j x_j\right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^m (trx_j) a_1^j | \cdots | \sum_{j=1}^m (trx_j) a_m^j\right] \\ &= \sum_{j=1}^m (trx_j)(a_1^j | \cdots | a_m^j) \\ &= \sum_{j=1}^m (trx_j) A_j. \end{aligned} \tag{۶.۲}$$

□

در اثبات فوق ما از برقراری قسمت (ج) به حکم (د) رسیدیم. از طرفی اثبات ((د)⇐(الف)⇐(ج)) و((د)⇐(ب)⇐(ج)) واضح است و قضیه فوق بصورت کامل اثبات می گردد.

در قضیه بعد فرم عملگر خطی نگهدارنده وارون مهتری ضعیف را تعیین می کنیم.

قضیه ۳.۲. فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک عملگر خطی باشد بطوریکه $x \prec_w y$ نتیجه دهد $T(y) \prec_w T(x)$، آنگاه بردار $a \in \mathbb{R}^n$ با درایه های نامثبت وجود دارد بطوریکه $T(x) = trx.a$.

برهان. از آنجا که $(e_i - e_j) \prec_w 0$، طبق فرض قضیه داریم:

$$\begin{aligned} & T(e_i - e_j) \prec_w 0 \\ \Rightarrow \quad & T(e_i) - T(e_j) \prec_w 0 \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

واگر $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{ij} \end{bmatrix}$، آنگاه:

$$\begin{bmatrix} t_{1i} - t_{1j} \\ \vdots \\ t_{ni} - t_{nj} \end{bmatrix} \prec_w 0 \tag{۸.۲}$$

با توجه به تعریف مهتری ضعیف باید ماکسیمم بردار سمت چپ در عبارت فوق و در نتیجه تمام درایه های این بردار کوچکتر یا مساوی با صفر باشند. و با استدلالی مشابه برای $e_j - e_i$ و نتیجه ای که حاصل می شود، داریم:

$$t_{1i} - t_{1j} = \cdots = t_{ni} - t_{nj} = 0. \tag{۹.۲}$$

و این یعنی ستون های $[T]$ باهم برابرند. از طرفی چون $e_i \prec_w 0$ و $0 \prec_w T(e_i)$، پس درایه های ستونهای $[T]$ باید کوچکتر یا مساوی صفر باشند. $\square$

سرانجام در قضیه بعد فرم عملگر خطی نگهدارنده وارون برای رابطه مهتری سطری ارائه می شود.

قضیه ۴.۲. فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی باشد بطوریکه $y \prec_r x$ نتیجه دهد $T(y) \prec_r T(x)$ آنگاه $T = 0$.

برهان. اولا اگر $T = 0$ آنگاه حکم برگشت قضیه به وضوح برقرار است.
بالعکس. برای هر i، $e_i \prec_r 0$. طبق فرض قضیه داریم:

$$T(e_i) \prec_r 0 \Rightarrow T(e_i) = 0$$

و بنابراین عملگر خطی T برابر با صفر است. $\square$

مراجع

1. Ando T, *Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues*, Linear Algebra Appl.**118**(1989), 163–248.
2. A.M. Hasani, M. Radjabalipour, *Linear preserver of matrix majorization*, International Journal of Pure and Applied Mathematics.**4**(2006), 475–482.
3. Li, C.K., Poon, *Linear operators preserving directional majorization*, Linear Algebra. Appl.**325** (2001), 141–146.