***ارتعاشات غیرخطی نانوتیر با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی مادی نانوتیر در حضور لایه­های سطحی با استفاده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش غیرموضعی***

بابک علیزاده حمیدی1، سیدامیرحسین حسینی2\*، رضا حسن­نژاد3

|  |  |
| --- | --- |
| 1: دانشجوی دکتری گروه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز | Babak.alizade\_hamidi@tabrizu.ac.ir |
| 2\* عضو هیات علمی گروه مهندسی صنایع، مکانیک و هوافضا مرکز آموزش عالی و فنی و مهندسی بوئین زهرا | hosseini@bzte.ac.ir |
| 3 عضو هیات علمی گروه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز | hassannejhad@tabrizu.ac.ir |

# چكيده

*در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی نانوتیر با استفاده از تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی پرداخته می­شود. هدف اصلی بررسی اثر توام رفتار غیرخطی مادی نانوتیر و اثرات سطح روی مشخصه­­های ارتعاشاتی نانوتیر می­باشد. از این رو معادله حاکم بر ارتعاشات غیر خطی نانوتیر با اصل هامیلتون استخراج می­گردد. با استفاده از روش اغتشاشات هموتوپی بهبود یافته معادله حاکم حل می­گردد و پاسخ زمانی و فرکانس غیر خطی نانوتیر در حضور رفتار غیر خطی مادی، پارامتر مقیاس طولی ماده بی­بعد، مدول الاستیک سطحی و کشش سطحی باقی­مانده بدست می­آید. نتایج تاثیر غیرخطی مادی را روی پاسخ زمانی و فرکانس غیرخطی نانوتیر نشان می­دهد. همچنین تاثیر توام پارامتر مقیاس طولی ماده بی­بعد و پارامتر غیر موضعی بی­بعد روی فرکانس غیرخطی نانوتیر در حضور غیر خطی مادی بررسی می­شود.*

**کليدواژه­ها:** ارتعاشات غیرخطی، تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی، اثرات سطحی، *روش اغتشاشات هموتوپی بهبود یافته، مدول الاستیک سطحی، کشش سطحی باقی­مانده*

**Vibration of nonlocal strain gradient nanobeam considering material nonlinearity and surface energy effects**

**Babak Alizadeh Hamidi1, Seyyed Amirhosein Hosseini2\*, Reza Hassanejad3**

|  |  |
| --- | --- |
| 1 Ph.D. Student, Mechanical Engineering Department, Tabriz University | Babak.alizade\_hamidi@tabrizu.ac.ir |
| 2\* Assistant Professor, Industrial, Mechanical and Aerospace Engineering Department, Buein Zahra Technical University | hosseini@bzte.ac.ir |
| 3 Associate Professor, Mechanical Engineering Department, Tabriz University | email@email.com (Cambria 8) |

**Abstract**

In this paper, nonlinear free vibration of nanobeam by using the nonlocal strain gradient theory is investigated. The main aim is to study the simultaneous effects of material nonlinearity and surface effects on the vibrational characteristics of nanobeam. Governing equation of nonlinear vibration of nanobeam is extracted by using Hamilton’s principle. The modified Homotopy perturbation method is utilized to solve the Governing equation. In the presence of material nonlinearity, the time response and nonlinear frequency versus the surface elastic modulus and residual surface tension were obtained. Results show the influence of material nonlinearity on the time response and nonlinear frequency. Also, simultaneous effects of non-dimensional length scale and nonlocal parameters on the nonlinear frequency in the presence of material nonlinearity were studied.

**Keywords:** Nonlinear vibration, nonlocal strain gradient theory, surface effects, modified Homotopy perturbation method, surface elastic modulus, residual surface tension.

**مقدمه**

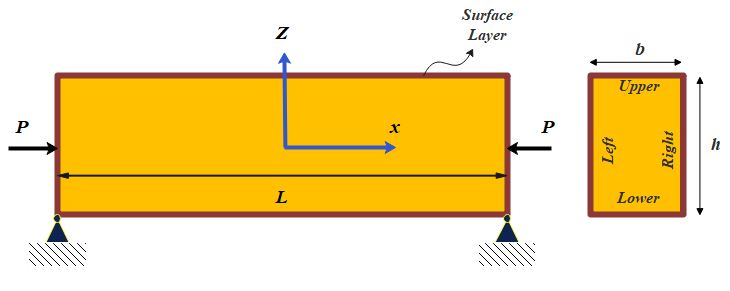
امروزه نانو فناوری به یکی از شاخه­های مهم در علوم مهندسی تبدیل شده است. با توجه به کاربرد نانوساختارها در وسایل الکترومکانیکی مختلف از جمله رزوناتورها [1, 2] ،تشخیص اتم­های گاز [3]، حافظه دستگاه­ها [4] و مواد کامپوزیتی [5]، بسیاری از محققان مشتاق شدند تا رفتار مکانیکی این ساختارها را در مقیاس نانو بررسی کنند. محققان برای نشان دادن اثرات وابسته به اندازه از تئوری غیرموضعی و تئوری گرادیان کرنش غیر موضعی در بررسی رفتار ارتعاشاتی نانوساختارها استفاده کرده­اند [6, 7]. در این راستا Dang و Nguyen رفتار کمانش و ارتعاشات غیرخطی نانوتیر متخلخل تابعی مدرج را بررسی کردند. آنها برای نشان دادند اثرات غیرخطی از کرنش­های ون-کارمن استفاده کردند و با استفاده از تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی معادلات حاکم را بدست آوردند. [8]. Manjur و همکاران ارتعاشات غیرخطی نانوتیر تابعی مدرج تعبیه شده رو بستر الاستیک غیرخطی را بررسی کردند. برای نشان دادند اثرات غیرخطینگی در مدل­سازی نانوتیر از کرنش­های ون-کارمن استفاده شده است. [9]. Jazi ارتعاشات اجباری غیرخطی یک نانوتیر تیموشنکوی دوبل را مورد بررسی قرار داد. سیستم مورد نظر تحت یک ذره متمرکز متحرک می­باشد. با استفاده از اصل هامیلتون معادلات ارتعاشاتی بدست آمد و تاثیر سرعت حرکت ذره روی رفتار دینامیکی نانوتیر بررسی شد [10].

در بررسی منابع، تاثیر غیرخطی مادی را در حضور اثرات سطحی مطالعه نشده است. از این در کار حاضر هدف مطالعه ارتعاشاتی غیرخطی نانوتیر با در نظر گرفتن غیرخطی مادی و غیرخطی هندسی در حضور اثرات سطحی می­باشد. بدین منظور با استخراج معادلات حاکم، معادله دیفرانسیل غیرخطی سیستم مورد نظر بدست آمد. با حل معادله حاکم فرکانس طبیعی و پاسخ زمانی بدست می­آید. نتایج تاثیر غیرخطی مادی را روی فرکانس طبیعی و پاسخ زمانی نشان می­دهد.

**استخراج معادلات حاکم**

میدان­های جابجایی برای نانوتیر شکل 1 در راستای *x*، *y* و *z* به صورت زیر می­باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |



شکل 1: شماتیکی از هندسه نانوتیر

با فرض کرنش‌های غیرخطی ون-کارمن تنها مؤلفه‌ی غیر صفر کرنش به صورت زیر بیان می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

معادله تنش کرنش غیرخطی با در نظر گرفتن غیرمادی به صورت است:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی مادی برای نانوتیر رابطه معادله تنش کرنش طبق تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی برای نانوتیر به صورت زیر نوشته می­شود [11]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

همچنین معادله تنش کرنش طبق تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی برای لایه­های سطحی به صورت زیر است:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

*بالانویس s بیانگر اثرات سطحی می­باشد. ea،l، ، D،  و  به ترتیب پارامتر غیرموضعی، پارامتر مقیاس طولی، مدول یانگ، مدول الاستیک مرتبه دوم یا غیرخطی مادی، کشش سطحی باقی مانده و مدول الاستیک سطحی است.*

برای بدست آوردن معادلات حاکم از اصل هامیلتون به صورت زیر استفاده می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که *V*،*T*و*U* به ترتیب بیانگر کار انجام شده توسط نیروهای خارجی، انرژی جنبشی و انرژی کرنشی می‌باشد. تغییرات انرژی کرنشی، جنبشی و کار ناشی از نیروهای خارجی به صورت زیر است:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

*که p بیانگر نیروی پیش­بار و  برابر . همچنین H برابر  می­باشد. M، و N منتجه ناشی از خمش، خمشی مرتبه بالا و نیروی محوری می­باشد. با جایگذاری روابط تا در اصل هامیلتون معادله حاکم بر ارتعاش نانوتیر به صورت زیر بدست می­آید:*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

همچنین شرایط مرزی نیز به صورت زیر هستند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

منجه­های نیرو و خمشی زبق روابط ،  *و به صورت زیر بدست می­آیند:*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

ضرایب در معادلات بالا به صورت زیر هستند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با جایگذاری معادلات و در اصل هامیلتون، معادله حاکم بر ارتعاش نانوتیر در حضور غیرخطی مادی به صورت زیر بدست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

حل معادله به صورت  فرض می­شود که برای شرایط مرزی دو سر مفصل به صورت  در نظر گرفته می­شود. با اعمال روش گالرکین به معادله  *معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر بدست می­آید:*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

*که ضرایب به صورت زیر تعریف شده است:*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

*با اعمال هموتوپی به معادله معادله زیر بدست می­آید [11]:*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

*در روش هموتوپی بهبودیافته  و W به صورت زیر بسط داده می­شوند:*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* ضرایب مجهولی می‌باشند که با بدست آوردن ضرایب مجهول، فرکانس غیرخطی سیستم یعنی  بدست می‌آید.*

با جایگذاری رابطه در رابطه و ساده­سازی، دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر بدست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

برای حل معادله شامل  شرایط اولیه  و در نظر گرفته می‌شود، بنابراین حل معادله شامل  به صورت  می­شود.

با جایگذاری  در معادله شامل ، معادله زیر بدست می‌آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که ضرایب به صورت معادله زیر می­باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

جمله دارای  در معادله سکولار می‌باشد که باید صفر باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در نهایت حل معادله دیفرانسیل  *به صورت زیر می­شود:*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

فرکانس طبیعی سیستم غیرخطی و پاسخ زمانی با دو جمله از حل هموتوپی بهبود یافته به صورت زیر می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

برای افزایش دقت محاسباتی یک مرحله دیگر از حل هموتوپی بهبود یافته نیز محاسبه می­شود. بنابراین با جایگذاری و  در معادله شامل، معادله زیر بدست می‌آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که ضرایب به صورت زیر است:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

جمله دارای  در معادله سکولار می‌باشد که باید صفر باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در نهایت حل معادله دیفرانسیل  *به صورت زیر می­شود:*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

فرکانس طبیعی سیستم غیرخطی و پاسخ زمانی با دو جمله از حل هموتوپی بهبود یافته به صورت زیر می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که *c و* *d* به صورت زیر است:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**ارایه نتایج و بحث**

در این قسمت نتایج بدست آمده از ارتعاشات غیرخطی نانوتیر با استفاده از تئوری گرادیان کرنش غیر موضعی همراه با غیرخطی مادی، اثرات سطح و نیروی پیش بار بررسی می شود. در نتایج ،  و  در نظر گرفته شده است. مشخصات مکانیکی نانوتیر طبق جدول 1 می­باشد.

F:\PHD Thesis\Codes&Figs-Nonlinear-Forced transverse vibrations-Nonlocal strain gradient theory-Surface effect\MHPM3\کنفرانس\2.tiff

شکل 2: همگرایی حل هموتوپی بهبود یافته به حل عددی 

، 

شکل 2 حل عددی رانگ کوتای مرتبه چهارم را با حل هموتوپی بهبود یافته نشان می­دهد. در این شکل ، ،  و  در نظر گرفته شده است. همانطور که در این شکل مشاهده می­باشد با در نظر گرفتن دو جمله از حل هموتوپی بهبود یافته MHPM2، پاسخ زمانی به حل عددی رانگ کوتای مرتبه چهارم نزدیک نشده است ولی با در نظر گرفتن سه جمله از حل هموتوپی بهبود یافته MHPM3 پاسخ زمانی به حل عددی نزدیکتر شده است.

F:\PHD Thesis\Codes&Figs-Nonlinear-Forced transverse vibrations-Nonlocal strain gradient theory-Surface effect\MHPM3\کنفرانس\4.tiff

شکل 3: فرکانس غیرخطی نانوتیر به ازای پارمتر غیرخطی مادی و مدول الاستیک سطحی در برابر پارامتر مقیاس طولی ماده بی­بعد

F:\PHD Thesis\Codes&Figs-Nonlinear-Forced transverse vibrations-Nonlocal strain gradient theory-Surface effect\MHPM3\کنفرانس\5.tiff

شکل 4: فرکانس غیرخطی نانوتیر به ازای پارمتر غیرخطی مادی و کشش سطحی باقی­مانده در برابر پارامتر غیرموضعی بی­بعد 

شکل 3 فرکانس غیرخطی نانوتیر را به ازای پارمتر غیرخطی مادی و مدول الاستیک سطحی  در برابر پارامتر مقیاس طولی ماده بی­بعد نشان می­دهد. در این شکل ،، می­باشد با توجه به این شکل با ثابت در نظر گرفتن غیرخطی مادی، افزایش مدول الاستیک سطحی سبب افزایش سفتی نانوتیر می­شود و در نتیجه سبب افزایش فرکانس غیرخطی نانوتیر می­شود. تاثیر غیرخطی مادی با ثابت در نظر گرفتن مدول الاستیک سطحی، سبب کاهش فرکانس غیرخطی نانوتیر شده است. همچنین افزایش پارامتر مقیاس طولی ماده بی­بعد سبب افزایش فرکانس غیرخطی نانوتیر شده است. شکل 4 فرکانس غیرخطی نانوتیر را به ازای کشش سطحی باقی­مانده در برابر پارامتر غیرموضعی بی­بعد  نشان می­دهد. در این شکل افزایش کشش سطحی باقی­مانده سبب افزایش فرکاس غیرخطی شده است. همچنین افزایش پارامتر غیرموضعی بی­بعد سبب کاهش فرکانس غیرخطی نانوتیر شده است.

F:\PHD Thesis\Codes&Figs-Nonlinear-Forced transverse vibrations-Nonlocal strain gradient theory-Surface effect\MHPM3\کنفرانس\6.tiff

شکل 5: فرکانس غیرخطی نانوتیر به ازای پارامتر غیرموضعی بی­بعد  و غیرخطی مادی در برابر پارامتر مقیاس طولی ماده بی­بعد 

شکل 5 فرکانس غیرخطی نانوتیر به ازای پارامتر غیرموضعی بی­بعد  و غیرخطی مادی در برابر پارامتر مقیاس طولی ماده بی­بعد  و مقادیر  نشان می­دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می­شود به طور کلی افزایش پارامتر مقیاس طولی ماده بی­بعد سبب افزایش فرکانس غیرخطی نانوتیر می­شود. با در نظرگرفتن غیرخطی مادی به صورت وقتی که  است، افزایش پارامتر غیرموضعی بی­بعد  سبب افزایش فرکانس غیرخطی نانوتیر می­شود که این امر سبب سفت شوندگی سفتی نانوتیر می­شود و وقتی که  افزایش پارامتر غیرموضعی بی­بعد  سبب کاهش فرکانس غیرخطی نانوتیر می­شود که این امر سبب نرم­شوندگی سفتی نانوتیر می­شود. همچنین وقتی که پارامتر غیرخطی مادی برابر صفر باشد اولا فرکانس فرکانس غیرخطی نانوتیر تیر نسبت به حالت افزایش پیدا می­کند ثانیا شروع نرم­شوندگی و سفت­شوندگی سفتی نانوتیر در  بزرگتری نسبت به حالت  رخ می­دهد.

**نتيجه‌گيري**

در این مقاله ارتعاشات غیرخطی آزاد نانوتیر با استفاده از تئوری گردیان کرنش غیرموضعی بررسی گردید. معادلات حاکم بر ارتعاشات نانوتیر با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی مادی و رفتار اثرات سطح بدست آمد. در نهایت پاسخ زمانی و فرکانس غیرخطی نانوتیر با در نظر گرفتن دو و سه جمله از حل هموتوپی بهبود یافته با در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طولی ماده بی­بعد تحت شرایط مختلف بررسی گردید.

\* بدست آوردن پاسخ نانوتیر در حضور پارامتر مقیاس طولی ماده بی­بعد ، غیرخطی مادی، هندسی و اثرات سطح با در نظر گرفتن دو و سه جمله از حل هموتوپی بهبود یافته که منجر به همگرایی پاسخ زمانی نانوتیر به حل عددی رانگ کوتای مرتبه چهارم می­شود.

\* افزایش پارامتر مقیاس طولی ماده بی­بعد سبب کاهش پریود زمانی پاسخ نانوتیر می­شود.

\* افزایش پارامتر مقیاس طولی ماده بی­بعد سبب افزایش سفتی نانوتیر می­شود که در نتیجه باعث افزایش فرکانس غیرخطی نانوتیر می­شود.

\* کاهش مدول الاستیک سطحی، کشش سطحی باقی­مانده سبب کاهش فرکانس غیرخطی نانوتیر می­شود

\* افزایش پارامتر غیرموضعی در برابر پارامتر مقیاس طولی ماده بی­بعد سبب سفت­شوندگی و نرم­شوندگی سفتی نانوتیر می­شود.

\* در نظر گرفتن غیرخطی مادی سبب کاهش فرکانس غیرخطی نانوتیر و جابجایی نقطه سفت­شوندگی و نرم­شوندگی سفتی نانوتیر می­شود.

**منابع**

[1] Mahmoud MA. Validity and accuracy of resonance shift prediction formulas for microcantilevers: a review and comparative study. Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences. 2016;41:386-429.

[2] Hamidi BA, Hosseini SA, Hassannejad R, Khosravi F. Theoretical analysis of thermoelastic damping of silver nanobeam resonators based on Green–Naghdi via nonlocal elasticity with surface energy effects. The European Physical Journal Plus. 2020;135:1-20.

[3] Arash B, Wang Q. Detection of gas atoms with carbon nanotubes. Scientific reports. 2013;3:1-6.

[4] Bunch JS, Van Der Zande AM, Verbridge SS, Frank IW, Tanenbaum DM, Parpia JM, et al. Electromechanical resonators from graphene sheets. Science. 2007;315:490-3.

[5] Kuilla T, Bhadra S, Yao D, Kim NH, Bose S, Lee JH. Recent advances in graphene based polymer composites. Progress in polymer science. 2010;35:1350-75.

[6] Khosravi F, Hosseini SA, Hamidi BA, Dimitri R, Tornabene F. Nonlocal torsional vibration of elliptical nanorods with different boundary conditions. Vibration. 2020;3:189-203.

[7] Alizadeh Hamidi B, Khosravi F, Hosseini SA, Hassannejad R. Closed form solution for dynamic analysis of rectangular nanorod based on nonlocal strain gradient. Waves in Random and Complex Media. 2020:1-17.

[8] Dang VH, Nguyen TH. Buckling and nonlinear vibration of functionally graded porous micro-beam resting on elastic foundation. Mechanics of Advanced Composite Structures‎. 2021.

[9] Alam M, Mishra SK. Nonlinear vibration of nonlocal strain gradient functionally graded beam on nonlinear compliant substrate. Composite Structures. 2021;263:113447.

[10] Jazi SH. Nonlinear vibration of an elastically connected double Timoshenko nanobeam system carrying a moving particle based on modified couple stress theory. Archive of Applied Mechanics. 2020;90:2739-54.

[11] He J-HJIJoNS, Simulation N. Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems. 2005;6:207-8.