وجود جواب غیربدیهی برای معادله (p,q)-لاپلاسین با نمای بحرانی سوبولف

مهدی لطیفی [1] *

[1] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پدافند هوایی خاتم الانبیاء(ص)
latifi.mmali@gmail.com

چکیده. وجود جواب ضعیف نابدیهی برای معادله بیضوی غیرخطی

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda f(x)|u|^{k-2}u + g(x)|u|^{p^*-2}u \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \\ u(x) \geq 0; \quad x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

تحت شرایطی روی توابع و پارامترهای موجود، را بررسی می‌کنیم.

۱. پیش‌گفتار

هدف ما مطالعه وجود جواب ضعیف نامنفی، برای مسئله بیضوی غیرخطی شامل (p,q) -لاپلاسین زیر، که شامل توان بحرانی سوبولف است، می باشد:

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda f(x)|u|^{k-2}u + g(x)|u|^{p^*-2}u \quad \text{در} \quad \mathbb{R}^N \\ u(x) \geq 0; \quad x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{۱.۱}$$

که $p < N, 2 \leq q \leq p < k < p^* := \frac{Np}{N-p}$ و $0 < \lambda$ یک پارامتر است. همچنین $0 \leq f(x) \in C\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^r\left(\mathbb{R}^N\right)$ با $r = \frac{p^*}{p^*-k}$ که روی زیرمجموعه باز $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ،با $|\Omega| > 0$ ، کراندار است، $0 \leq g(x) \in C\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ و $\Delta_m u$ عملگر m -لاپلاسین است.

قضیه ۱.۱. با فرضیات بالا بر روی توابع و پارامترهای موجود در ۱.۱ ، $\lambda^* > 0$ موجود است که برای هر $\lambda > \lambda^*$ مسئله حداقل یک جواب ضعیف غیربدیهی در فضای X دارد.

2010 Mathematics Subject Classification. 35J62; 35B33, 35A15.

واژگان کلیدی. (p,q) -لاپلاسین، نمای بحرانی سوبولف، جواب نامنفی.

* سخنران

۲. تعاریف و قضایای اولیه

گزاره ۱.۲. (قضیه مسیر کوهی)[۲] X یک فضای باناخ حقیقی و $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$. فرض کنیم $\varphi(0)=0$ و $\alpha,\rho>0$ و $x_1 \in X \setminus \overline{B_\rho}(0)$ ای موجود باشند که:

(۱) $\varphi(u) \geq \alpha$ برای هر $u \in X$ با $\|u\|_X = \rho$؛

(۲) $\varphi(x_1) < \alpha$؛

در آن صورت دنباله ی $\{u_n\} \subset X$ موجود است که: $\varphi(u_n) \to c$ و $\varphi'(u_n) \to 0,$

$$c := \inf\left\{\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)) : \gamma \in C([0,1],X), \gamma(0)=0 \ and \ \gamma(1)=x_1\right\}.$$

برای $1<m<N$ ، $\mathcal{D}^{1,m}(\mathbb{R}^N)$ را بستار فضای $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ نسبت به نرم $W^{1,m}(\mathbb{R}^N)$ در نظر می گیریم. $\mathcal{D}^{1,m}(\mathbb{R}^N)$ یک فضای باناخ انعکاسی است که به صورت

$$\mathcal{D}^{1,m}(\mathbb{R}^N) := \left\{u \in L^{m^*}(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^m(\mathbb{R}^N), j=1,\dots,N\right\},$$

نیز مشخص می شود که $m^* := \frac{Nm}{N-m}$، با نرم $\|u\|_{\mathcal{D}^{1,m}} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^m dx\right)^{\frac{1}{m}}$ که با نرم $W^{1,m}(\mathbb{R}^N)$ معادل است.[۱].

لم ۲.۲. (principle concentration-compactness) $\upsilon_n \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ را دنباله ای کراندار بگیرید که $\upsilon_n \rightharpoonup \upsilon$ در $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. اگر زیردنباله ای از آن موجود باشد که، $|\upsilon_n|^{p^*} dx \rightharpoonup \upsilon$ برای اندازه υ ای، در آن صورت $x_j \in \mathbb{R}^N$ و $\upsilon_i > 0$ ، برای $i = 1,2,3,\cdots$ وجود دارد که

$$\upsilon_n^{p^*} \rightharpoonup |\upsilon|^{p^*} + \sum_{i=1}^{\infty} \upsilon_i \delta_{x_i} \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \upsilon_i^{\frac{p}{p^*}} < \infty$$

که δ_{x_i} اندازه دیراک در x_i است.

ثابت سوبولف را به صورت زیر داریم: . $S = \inf\left\{\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_{p^*}^p} : u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), u \neq 0\right\}$

۳. نتایج

فضای باناخ انعکاسی $X = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ را با نرم $\|u\|_X = \|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}} + \|u\|_{\mathcal{D}^{1,q}}$ در نظر می گیریم. قرار می دهیم $u_+ = \max\{0,u\}$ و $u_- = u - u_+$.
تابعک اویلر-لاگرانژ متناظر با ۱.۱ به صورت زیر است:

(۱.۳)

$$E_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx - \frac{\lambda}{k}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)u_+^k dx - \frac{1}{p^*}\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x)u_+^{p^*} dx$$

تابعک E_λ در X خوش تعریف و از کلاس C^1 است و نقاط بحرانی آن جوابهای ۱.۱ هستند.

تعریف ۱.۳. X فضای باناخ و $E : X \to \mathbb{R}$ تابعکی دیفرانسیل پذیر:

(۱) دنباله $\{u_n\} \subset X$ یک $(PS)_c$-دنباله برای E گفته می شود اگر $E(u_n) \to c$ و $E'(u_n) \to 0$ وقتی $n \to \infty$

(۲) اگر هر $(PS)_c$-دنباله دارای زیر دنباله ای همگرا (در X) باشد، گوئیم E در شرط $(PS)_c$ صدق می کند.

لم ۲.۳. اگر $\{u_n\}$ یک $(PS)_c$-دنباله برای $E_\lambda(u)$ باشد، آنگاه $\{u_n\}$ کراندار است.

لم ۳.۳. اگر $\{u_n\} \subset X$ یک $(PS)_c$-دنباله برای E_λ باشد، در آن صورت تابع نامنفی $u \in X$ وجود دارد که $\nabla u_n \to \nabla u$ تقریبا همه جا در $\mathbb{R}^N$.

لم ۴.۳. برای هر $\lambda > 0$ تابعک E_λ در شرایط زیر صدق می کند:

i : $R, \rho > 0$ وجود دارد که: $E_\lambda(u) \geq \rho$ با $\|u\| = R$.

ii : $u_0 \in X$ وجود دارد که $\|u_0\| > R$ و $E_\lambda(u_0) < 0$.

برای هر $\lambda > 0$ قرار می دهیم: $\tilde{C}_\lambda := \inf\limits_{u \in X \setminus \{0\}} \max\limits_{t \geq 0} E_\lambda(tu)$.

لم ۵.۳. $\lambda^* > 0$ ای وجود دارد که : $0 < \tilde{C}_\lambda < \frac{S^{\frac{N}{p}}}{N} \qquad \forall \lambda > \lambda^*$.

برهان. از لم ۴.۳ داریم که $E_\lambda(u) \geq \rho > 0$ برای $\|u\| = R$ ، لذا $\tilde{C}_\lambda \geq \rho > 0$ (مقدار ρ به λ وابسته اما همیشه مثبت است). اگر $u_0 \in X \setminus \{0\}$ با ساپورت داخل Ω بگونه ای باشد که $u_0 \geq 0$ و $\|u_0\|_{p^*} = 1$ ، از رابطه

$$E_\lambda(tu_0) = \frac{t^p}{p}\|u_0\|^p_{D^{1,p}} + \frac{t^q}{q}\|u_0\|^q_{D^{1,q}} - \frac{\lambda t^k}{k}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)u_0^k dx - \frac{t^{p^*}}{p^*}\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x)u_0^{p^*} dx$$

می بینیم که $E_\lambda(tu_0) \to -\infty$ وقتی $t \to \infty$ و $E_\lambda(tu_0) \to 0^+$ ، هرگاه $t \to 0^+$. لذا $t_\lambda > 0$ ای وجود دارد که $\max\limits_{t \geq 0} E_\lambda(tu_0) = E_\lambda(t_\lambda u_0)$ و بنابراین برای هر $\lambda > 0$:

$$\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)u_0^k dx = \frac{\|u_0\|^p_{D^{1,p}}}{{t_\lambda}^{k-p}} + \frac{\|u_0\|^q_{D^{1,q}}}{{t_\lambda}^{k-q}} - {t_\lambda}^{p^*-k}\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x)u_0^{p^*} dx. \qquad (۲.۳)$$

سمت چپ عبارت بالا مثبت است لذا نتیجه می گیریم که $t_\lambda \to 0$ وقتی $\lambda \to \infty$. از طرفی چون $E_\lambda(t_\lambda u_0) \to 0^+$ وقتی $t_\lambda \to 0^+$ ، پس $\lambda^* > 0$ وجود دارد که

$$\max_{t \geq 0} E_\lambda(tu_0) = E_\lambda(t_\lambda u_0) < \frac{S^{\frac{N}{p}}}{N} \quad \text{برای هر} \quad \lambda > \lambda^*.$$

چون $\tilde{C}_\lambda \leq \max\limits_{t \geq 0} E_\lambda(tu_0)$ نتیجه می شود که $\tilde{C}_\lambda < \frac{S^{\frac{N}{p}}}{N}$ برای هر $\lambda > \lambda^*$. □

اثبات قضیه ۱.۱. از لم ۴.۳ و ۲.۲، داریم که دنباله $\{u_n\}$ موجود است که $E_\lambda(u_n) \to c_\lambda$ و $E'_\lambda(u_n) \to 0$. ($\{u_n\}$ یک $(PS)_{c_\lambda}$ - دنباله برای E_λ است.) بر طبق لم ۲.۳ و ۳.۳ تابع نامنفی $u \in X$ موجود است که $u_n \to u$ و $\nabla u_n \to \nabla u$ تقریبا همه جا در $\mathbb{R}^N$. بنابراین برای هر $\varphi \in X$:

$$\int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla \varphi dx \to \int |\nabla u|^{m-2} \nabla u \nabla \varphi dx \quad \text{برای} \quad m = p, q$$

$$\int g(x) |u_n|^{p^*-2} u_n \varphi dx \to \int g(x) |u|^{p^*-2} u \varphi dx$$

$$\int f(x) |u_n|^{k-2} u_n \varphi dx \to \int f(x) |u|^{k-2} u \varphi dx.$$

به عبارت دیگر $E'(u_n)(\varphi) \to E'(u)(\varphi)$ و نتیجتا $E'(u)\varphi = 0$ برای $\varphi \in X$. حال اگر $u = 0$ از آنجا که u_n در X کراندار است، $\ell \geq 0$ وجود دارد که

$$\int |\nabla u_n|^p dx + \int |\nabla u_n|^q dx \to \ell.$$

از طرفی چون $E'_\lambda(u_n) \to 0$ ، داریم که

(۳.۳)

$$\int |\nabla u_n|^p dx + \int |\nabla u_n|^q dx = \lambda \int f(x) u_{n+}^k dx + \int g(x) u_{n+}^{p^*} dx + o(1)$$

و چون u_{n+}^k در $L^{\frac{p^*}{k}}$ کراندار است و $u_{n+}^k \to 0$ تقریبا همه جا در $\mathbb{R}^N$. پس داریم: $u_{n+}^k \rightharpoonup 0$ در $L^{\frac{p^*}{k}}$ و چون $f \in L^r = L^{\frac{p^*}{p^*-k}} = \left(L^{\frac{p^*}{k}}\right)'$ پس $\int g(x) u_{n+}^{p^*} dx \to \ell$.

اما برای هر $\lambda > \lambda_*$ ، $E_\lambda(u_n) \to c_\lambda \leq \tilde{C}_\lambda$ لذا

$$\frac{1}{p} \int |\nabla u_n|^p dx + \frac{1}{q} \int |\nabla u_n|^q dx - \frac{\lambda}{k} \int f u_{n+}^k dx - \frac{1}{p^*} \int g u_{n+}^{p^*} dx \to c_\lambda \leq \tilde{C}_\lambda$$

بنابراین $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) \ell \leq \tilde{C}_\lambda$ یا $\frac{\ell}{N} \leq \tilde{C}_\lambda$. اکنون از

$$\int |\nabla u_n|^p dx + \int |\nabla u_n|^q dx \geq S \left(\int |u_n|^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \geq S \left(\int u_{n+}^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}}$$

پس $\ell \geq S(\ell)^{\frac{p}{p^*}}$ یا $\ell^{\frac{p}{N}} = \ell^{1-\frac{p}{p^*}} \geq S$ و بنابراین $\tilde{C}_\lambda > \frac{\ell}{N} \geq \frac{S^{\frac{N}{p}}}{N}$. که تناقض است. □

مراجع

[1] Cherfils, L., Il'yasov, Y.: On the stationary solutions of generalized reaction diffusion equations with (p, q)-Laplacian. Comm. Pure Appl. Anal. 4, 9–22(2005)

[2] Figueiredo, GM.: Existence of positive solutions for a class of (p; q) elliptic problems with critical growth on RN. J. Math. Anal. Appl. 378, 507-518(2011)