بیست و چهارمین سمینار آنالیز ریاضی و کاربردهای آن
۵-۶ خرداد ۱۴۰۰، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

وجود حداقل سه جواب برای یک معادله دیفرانسیل ضربه‌ای مرتبه ششم

عثمان هلاکو [1] *

[1]گروه ریاضی، واحد علی‌آباد کتول، دانشگاه آزاد اسلامی، علی آباد کتول، ایران
halakoo@aliabadiau.ac.ir

چکیده. در این مقاله با کمک قضایای بونانو وجود حداقل سه جواب را برای یک نوع معادله دیفرانسیل ضربه‌ای مرتبه ششم ثابت می‌کنیم. یک حالت خاص و یک مثال نیز در ادامه ارائه شده است.

۱. پیش‌گفتار

در این مقاله مسئله مقدار مرزی ضربه‌ای مرتبه ششم زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -u^{(6)}(t)+u^{(4)}(t)-(p(t)u'(t))'+q(t)u(t)=\lambda f(t,u(t)), & t\neq t_j,\ t\in[0,1] \\ u(0)=u(1)=u'''(0)=u'''(1)=0 & \\ \Delta\left(u^{(3)}(t_j)\right)=\mu I_{1j}(u(t_j)), & j=1,2,\dots,m, \\ -\Delta\left(u^{(4)}(t_j)\right)=\mu I_{2j}(u'(t_j)), & j=1,2,\dots,m, \\ \Delta\left(u^{(5)}(t_j)\right)=\mu I_{3j}(u''(t_j)), & j=1,2,\dots,m, \end{cases} \tag{۱.۱}$$

که در آن $p\in C^1([0,1]\times[0,+\infty))$ و $q\in L^\infty([0,1])$ و $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع L^1-کاراتئودوری است و برای هر $1\leq j\leq m$، $I_{1j},I_{2,j}\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ و $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m<t_{m+1}=1$ بوده و عملگر Δ به‌صورت $\Delta(u(t_j))=$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47J30; Secondary 47H10, 47H05.

واژگان کلیدی. معادله دیفرانسیل ضربه‌ای، جواب کلاسیک، جواب ضعیف، نقطه بحرانی. .

* سخنران

$u(t_j^+) - u(t_j^-) = \lim_{t\to t_j^+} u(t) - \lim_{t\to t_j^-} u(t)$ تعریف می‌شود و λ و μ اعداد مثبت ثابتی هستند.

قضیه ۱.۱ ([۱، نتیجه 3.1]). فرض کنیم X یک فضای باناخ حقیقی انعکاسی باشد، $\Phi : X \to \mathbb{R}$ یک تابعک به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو، محدب و اجباری باشد به‌طوری‌که مشتق گاتوی آن دارای یک وارون پیوسته روی X^* است، و $\Psi : X \to \mathbb{R}$ یک تابعک به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو باشد که مشتق گاتوی آن فشرده است و داشته باشیم:

$$\inf_X \Phi = \Phi(0) = \Psi(0) = 0.$$

فرض کنیم دو عدد مثبت r_1 و r_2 و $\bar{x} \in X$ موجود باشند به‌طوری‌که $2r_1 < \Phi(\bar{x}) < \frac{r_2}{2}$ و

(B_1) $\frac{\sup_{x\in\Phi^{-1}((-\infty,r_1))}\Psi(x)}{r_1} < \frac{2}{3}\frac{\Psi(\bar{x})}{\Phi(\bar{x})}$؛

(B_2) $\frac{\sup_{x\in\Phi^{-1}((-\infty,r_2))}\Psi(x)}{r_2} < \frac{1}{3}\frac{\Psi(\bar{x})}{\Phi(\bar{x})}$؛

(B_3) برای هر

$$\lambda \in \Lambda_{r_1,r_2} := \left(\frac{3}{2}\frac{\Phi(\bar{x})}{\Psi(\bar{x})}, \min\left\{\frac{r_1}{\sup_{x\in\Phi^{-1}((-\infty,r_1))}\Psi(x)}, \frac{\frac{r_2}{2}}{\sup_{x\in\Phi^{-1}((-\infty,r_2))}\Psi(x)}\right\}\right)$$

و برای هر $x_1, x_2 \in X$ که کمینه‌های موضعی تابعک $\Phi - \lambda\Psi$ می‌باشند و نیز $\Psi(x_1) \geq 0$ و $\Psi(x_2) \geq 0$، داشته باشیم:

$$\inf_{s\in[0,1]} \Psi(sx_1 + (1-s)x_2) \geq 0.$$

در این‌صورت برای هر $\lambda \in \Lambda_{r_1,r_2}$، تابعک $\Phi - \lambda\Psi$ دارای حداقل سه نقطه بحرانی مجزا می‌باشد که در $\Phi^{-1}((-\infty, r_2))$ قرار می‌گیرند.

قضیه ۲.۱ ([۳، قضیه 3.6]). فرض کنیم X یک فضای باناخ حقیقی انعکاسی باشد، $\Phi : X \to \mathbb{R}$ یک تابعک به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو، نیم‌پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای و اجباری باشد به‌طوری‌که مشتق گاتوی آن دارای یک وارون پیوسته روی X^* است، و $\Psi : X \to \mathbb{R}$ یک تابعک به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو و نیم‌پیوسته بالایی ضعیف دنباله‌ای باشد که مشتق گاتوی آن فشرده است به‌طوری‌که $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$. فرض کنیم $r \in \mathbb{R}$ و $u_1 \in X$ با شرط $0 < r < \Phi(u_1)$ موجود باشند به‌طوری‌که

(A_1) $\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r])}\Psi(u) < r\frac{\Psi(u)}{\Phi(u_1)}$؛

(A_2) برای هر $\lambda \in \Lambda_r := \left(\frac{\Phi(u_1)}{\Psi(u_1)}, \frac{r}{\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r])}\Psi(u)}\right)$، تابعک $\Phi - \lambda\Psi$ اجباری باشد.

در این‌صورت برای هر $\lambda \in \Lambda_r$، تابعک $\Phi - \lambda\Psi$ دارای حداقل سه نقطه بحرانی مجزا در X است.

لم ۳.۱ ([۲]). $u \in X$ یک جواب ضعیف مسئله (۱.۱) می‌باشد اگر و تنها اگر u یک جواب کلاسیک مسئله (۱.۱) باشد.

لم ۴.۱. فرض کنیم شرط زیر برقرار باشد:

(H_1) اعداد $\alpha_i, \beta_i > 0$ و $\sigma_i \in [0,1)$، که $i = 1,2,3$ موجود باشند به‌طوری‌که برای $x \in \mathbb{R}$، $i = 1,2,3$ و $j = 1,2,\ldots,m$ داشته باشیم:

$$|I_{ij}(x)| \leq \alpha_i + \beta_i |x|^{\sigma_i}$$

در این‌صورت برای $u \in X$ داریم:

$$\left| \sum_{j=1}^{m} \int_0^{u^{(i-1)}(t_j)} I_{ij}(x)dx \right| \leq m \left(\alpha_i \|u\|_\infty + \frac{\beta_i}{\sigma_i + 1} \|u\|_\infty^{\sigma_i+1} \right), \ \forall i = 1,2,3$$

۲. دست‌آوردهای پژوهش

قرار می‌دهیم:

$$k = \frac{\delta^2 \pi^2}{288 \left(1 + \frac{\|p\|_\infty}{\pi^2} + \frac{\|q\|_\infty}{\pi^4}\right) \left[\frac{1}{\alpha^5} + \frac{1}{(1-\beta)^5}\right]}$$

$$\Gamma_{i,c} = \frac{\alpha_i}{c} + \left(\frac{\beta_i}{\sigma_i + 1}\right) c^{\sigma_i - 1}$$

که در آن $0 < \alpha < \beta < 1$ و c یک عدد مثبت بوده و برای $i = 1,2,3$، α_i، β_i و σ_i در فرض (H_1) لم ۴.۱ داده شده‌اند.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم (H_1) برقرار بوده و دو عدد مثبت c و d با شرط $c < \frac{2d}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{(1-\beta)^3}\right]^{\frac{1}{2}}$ موجود باشند به‌طوری‌که:

(A_1) برای هر $(t,\varepsilon) \in ([0,\alpha] \cup [\beta,1]) \times [0,d]$ داشته باشیم: $F(t,\varepsilon) \geq 0$

(A_2) $\frac{\int_0^1 \max_{|\varepsilon| \leq c} F(t,\varepsilon)dt}{c^2} < \frac{k \int_\alpha^\beta F(t,d)dt}{d^2}$

(A_3) $\limsup_{|\varepsilon| \to +\infty} \frac{\sup_{t \in [0,1]} F(t,\varepsilon)}{\varepsilon^2} \leq \frac{\pi^2 \int_0^1 \max_{|\varepsilon| \leq c} F(t,\varepsilon)dt}{4c^2}$

در این‌صورت برای هر

$$\lambda \in \Lambda = \left(\frac{2\delta^2\pi^2 d^2}{k \int_\alpha^\beta F(t,d)dt}, \frac{2\delta^2\pi^2 c^2}{\int_0^1 \max_{|\varepsilon| \leq c} F(t,\varepsilon)dt} \right)$$

عدد

$$\rho = \frac{1}{2m} \min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{2\delta^2\pi^2c^2 - \lambda \int_0^1 \max_{|\varepsilon| \leq c} dt}{c^2 \Gamma_{i,c}}, \frac{k\lambda \int_\alpha^\beta F(t,d)dt - 2\delta^2\pi^2 d^2}{d^2 \Gamma_{i,\left(\frac{d}{\sqrt{k}}\right)}} \right\}$$

وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\mu \in [0,\rho)$، مسئله (۱.۱) حداقل سه جواب کلاسیک دارد.

لم ۲.۲. فرض کنیم به ازای هر $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$، $f(t,x) \geq 0$ و برای هر $x \in \mathbb{R}$، $j = 1,2,\ldots,m$ و $i = 1,2,3$، داشته باشیم: $I_{ij}(x) \leq 0$. اگر u جواب کلاسیک مسئله (۱.۱) باشد آن‌گاه به ازای هر $t \in [0,1]$ داریم: $u(t) \geq 0$.

قرار می‌دهیم:

$$G_{i,c} = \sum_{j=1}^{m} \min_{|\varepsilon|\le c} \int_0^{\varepsilon} I_{ij}(x)dx, \quad \forall c > 0,\ i = 1,2,3$$

نتیجه دیگری را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیه ۳.۲. فرض کنیم سه عدد مثبت c_1، c_2 و d با شرط

$$\frac{\pi c_1}{2\left[\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{(1-\beta)^3}\right]^{\frac{1}{2}}} < d < \sqrt{\frac{k}{2}} c_2$$

موجود باشند به‌طوری‌که:

(B_1) برای هر $(t,x) \in [0,1] \times [0,c_2]$ داشته باشیم: $f(t,x) \ge 0$؛

(B_2) $\frac{\int_0^1 F(t,c_1)dt}{c_1^2} < \frac{2}{3} k \frac{\int_\alpha^\beta F(t,d)dt}{d^2}$؛

(B_3) $\frac{\int_0^1 F(t,c_2)dt}{c_2^2} < \frac{k}{3} \frac{\int_\alpha^\beta F(t,d)dt}{d^2}$؛

در این‌صورت برای هر

$$\lambda \in \Lambda' = \left(\frac{3\delta^2\pi^2 d^2}{k\int_\alpha^\beta F(t,d)dt}, \delta^2\pi^2 \min\left\{ \frac{2c_1^2}{\int_0^1 F(t,c_1)dt}, \frac{c_2^2}{\int_0^1 F(t,c_2)dt} \right\} \right)$$

و برای هر تابع نامثبت I_{ij} که $j = 1,2,\ldots,m$ و $i = 1,2,3$، عدد

$$\rho^* = \frac{1}{2} \min_{1\le i\le 3} \left\{ \frac{\lambda\int_0^1 F(t,c_1)dt - 2\delta^2\pi^2 c_1^2}{G_{i,c_1}}, \frac{\lambda\int_0^1 F(t,c_2)dt - \delta^2\pi^2 c_2^2}{G_{i,c_2}} \right\}$$

وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\mu \in [0,\rho)$، مسئله (۱.۱) حداقل سه جواب کلاسیک u_i، $i = 1,2,3$، در X دارد که به ازای هر $i = 1,2,3$، $0 < \|u_i\|_\infty \le c_2$.

مراجع

1. G. Bonanno and P. Candito, *Non-differentiable functionals and applications to elliptic problems with discontinuous nonlinearities*, J. Differential Equations, **244** (2008), no. 12, 3031–3059.
2. G. Bonanno, B. Di Bella and J. Henderson, *Existence of solutions to second-order boundary-value problems with small perturbations of impulses*, Electron. J. Differential Equations, **126** (2013), 1–14.
3. G. Bonanno and S. A. Marano, *On the structure of the critical set of non-differentiable functions with a weak compactness condition*, Appl. Anal. **89** (2010), no. 1, 1–10.