بیست و چهارمین سمینار آنالیز ریاضی و کاربردهای آن
۵-۶ خرداد ۱۴۰۰، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

روش‌های بهینه‌سازی مبتنی بر روش هم‌مکانی چندجمله‌ای برنشتاین برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل معمولی

محمدرضا انصاری [1] *

[1] گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)، قزوین، ایران
mr.ansari@sci.ikiu.ac.ir

چکیده. یک مشکل اساسی در روش هم‌مکانی بدشرط شدن ماتریس ضرایب با افزایش درجه تقریب است. این پدیده باعث مشکلات عددی و کاهش در دقت جواب می‌شود. در این مقاله، روش‌هایی بر اساس ترکیب روش هم‌مکانی برنشتاین و روش‌های بهینه‌سازی برای جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط اولیه و یا مرزی پیشنهاد شده است. در این‌جا، جواب تقریبی با استفاده از جواب یک مساله بهینه‌ازی مقید به دست می‌آید. برای بررسی کارایی روش‌ها، مسایل آزمایشی از مرتبه‌های مختلف در نظر گرفته شده و نتایج به دست آمده با نتایج روش‌های دیگر مقایسه می‌شوند. بررسی‌ها نشان می‌دهند که روش‌های پیشنهاد شده دقیق، کارا و دارای پایداری عددی خوبی هستند.

۱. پیش‌گفتار

در این مقاله، هدف ما ارایه روش‌هایی با دقت بالا و کارا برای حل تقریبی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n با ضرایب متغیر به شکل کلی زیر است:

$$L(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(k)}(x) = f(x), \qquad x \in [a,b] \tag{۱.۱}$$

که در آن، L عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه n، $f(x)$ و $p_i(x)$ ها توابعی معلوم و $[a,b]$ دامنه مساله می‌باشد. در اینجا و در ادامه، مشتق kام تابع y نسبت به متغیر x با $y^{(k)}(x)$ نشان داده می‌شود. تعداد $n-1$ شرط اولیه یا شرط مرزی لازم برای حل (۱.۱) عبارتند از:

$$S_l(y) = q_l, \qquad l = 1, \ldots, n-1 \tag{۲.۱}$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 45J05; Secondary 90C90.
واژگان کلیدی. معادلات مسایل مقدار اولیه و مرزی، معادله دیفرانسیل خطی، روش هم‌مکانی برنشتاین، بهینه‌سازی .
* سخنران

که در آن، S_lها عملگرهای خطی شرایط اولیه و یا شرایط مرزی بوده و q_lها حقیقی و معلوم هستند.

چندجمله‌ای‌های برنشتاین به دلیل ویژگی‌های خوب خود در نظریه تقریب و طراحی هندسی بسیار مورد توجه قرار داشته‌اند و از این چندجمله‌ای‌ها در حل انواع معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی استفاده شده است [۱، ۲، ۳، ۵، ۷]. علاوه براین، در سال‌های اخیر روش‌های هم‌مکانی به صورت گسترده برای حل انواع معادلات دیفرانسیل استفاده شده‌اند [۱، ۲، ۶]. در مسایل خطی، روش‌های هم‌مکانی اغلب حل مساله را به حل یک دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌کنند. مشکلی که در اینجا می‌تواند بروز کند، بدشرط بودن ماتریس ضرایب است که باعث بروز مشکلات عددی وکاهش دقت جواب می‌شود. این مشکل اغلب زمانی پدید می‌آید که نقاط هم‌مکانی خیلی به هم نزدیک باشند.

در گذشته، روش‌های مبتنی بر بهینه‌سازی در مدل‌سازی و حل بسیاری از مسایل با موفقیت به کار گرفته شده‌اند [۶، ۸]. در این مقاله، ما سه روش براساس کمینه‌سازی باقیمانده‌های متناظر با معادلات هم‌مکانی چندجمله‌ای‌های برنشتاین برای حل معادله (۱.۱) و (۲.۱) پیشنهاد می‌کنیم. این روش‌ها نه تنها نسبت به روش هم‌مکانی جواب‌های دقیق‌تری می‌دهند، بلکه از نظر عددی با افزایش درجه تقریب پایدار می‌باشند.

۲. چندجمله‌ای‌های برنشتاین

چندجمله‌ای‌های پایه برنشتاین از مرتبه m بر بازه $[a,b]$ را $B_{i,m}(x)$ها می‌گیریم و برای سادگی، متناظر با $i<0$ و $i>m$ فرض می‌شود $B_{i,m}=0$. از مزایای این چندجمله‌ای‌ها، سادگی محاسبه مقادیر تابع و مشتقات آن در نقاط مرزی است [۴]. با تعریف

$$\phi_m(x) = [B_{0,m}(x)\ B_{1,m}(x)\ \ldots\ B_{m,m}(x)]^T \tag{۱.۲}$$

داریم $\phi_m^{(k)}(x) = D^k\phi_m(x)$ که در آن، D ماتریس عملیاتی مشتق با درایه‌های زیر است [۴]:

$$d_{i,j} = \begin{cases} -j, & i=j-1 \\ 2j-m, & i=j \\ m-j, & i=j+1 \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \qquad i,j=1,\ldots,m+1$$

فرض کنید که $y\in C^k[a,b]$. چندجمله‌ای برنشتاین متناظر با y در بازه $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_m(y;x) = \sum_{k=0}^{m} y(a+\frac{(b-a)i}{m})B_{i,m}(x).$$

قضیه زیر بستر مناسب برای استفاده از این چندجمله‌ای‌های در تقریب توابع را فراهم می‌کند [۲].

قضیه ۱.۲. فرض کنید که $K>0$ عدد صحیح مثبتی باشد و $y\in C^k[a,b]$. در این صورت،

$$\lim_{m\to\infty} B_m^{(k)}(y;x) = y^{(k)}(x), \qquad k=0,1,\ldots,K.$$

۳. روش هم‌مکانی

یک جواب هم‌مکانی y_m برای یک معادله تابعی روی بازه Ω، عضوی از یک فضای تابعی با بعد متناهی به نام فضای هم‌مکانی است که معادله را در زیر مجموعه‌ای متناهی و خاص از نقاط به نام نقاط هم‌مکانی برقرار

می‌کند. اگر شرایط اولیه یا مرزی نیز وجود داشته باشند، آنگاه بدیهی است که y_m باید این شرایط را نیز برقرار کند. معادله (۱.۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید

$$y_m(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i B_{i,m}(x) = \phi_m(x)^T C \qquad (۱.۳)$$

تقریب جواب باشد که در آن، $C = [c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_m]$ بردار ضرایب مجهول و $\phi_m(x)$ بردار توابع پایه است که در (۱.۲) تعریف شده است. با جای‌گذاری (۱.۳) در (۱.۱) و استفاده از نقاط هم‌مکانی $x_j \in [a, b]$، برای $j = 1, \ldots, m-n+2$ به دست می‌آید:

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} p_k(x_j) D^k \phi_m(x_j)\Big)^T C = f(x_j), \qquad j = 1, \ldots, m-n+2 \qquad (۲.۳)$$

هم‌چنین، با جای‌گذاری (۱.۳) در شرایط اولیه و یا مرزی (۲.۱) و استفاده از خطی بودن S_lها به دست می‌آید:

$$\big(S_l(\phi_m)\big)^T C = q_l, \qquad l = 1,\ \ldots,\ n-1 \qquad (۳.۳)$$

مجموع $m-n+2$ معادله (۲.۳) و $n-1$ معادله (۳.۳) دستگاهی متشکل از $m+1$ معادله و $m+1$ مجهول می‌سازد که با حل آن c_iها و در نتیجه y_m به دست می‌آید.

۴. روش‌های پیشنهادی مبتنی بر بهینه‌سازی

متناظر با معادله (۱.۱)، تابع باقیمانده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(y; x) = L\big(y(x)\big) - f(x).$$

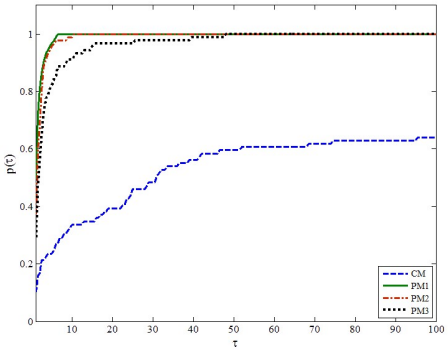
برای جواب تقریبی y_m تابع باقیمانده برابر است با

$$R_m(x) \equiv R(y_m; x) = L\big(\phi_m(x)\big)^T C - f(x).$$

بردار C با استفاده از ترکیب روش هم‌مکانی و کمینه‌سازی خطای متناظر با تابع $R_m(x)$ تعیین خواهد شد. y_m باید طوری تعیین شود که $n-1$ شرط اولیه یا مرزی به طور دقیق برآورده شوند. این $n-1$ معادله به دست می‌دهد و در نتیجه برای تعیین y_m تنها $m-n+2$ درجه آزادی باقی می‌ماند. نقاط هم‌مکانی را $x_1, \ldots, x_{n_p}$ در نظر می‌گیریم که $n_p \geq m-n+2$. این نقاط را به دو زیرمجموعه متمایز A و B افراز کرده و اندیس نقاط دو مجموعه را به ترتیب با I و J نشان می‌دهیم. برای هر $j \in J$ قرار می‌دهیم $R_m(x_j) = 0$، تا در این نقاط y_m به طور دقیق در معادله دیفرانسیل صدق کند. بهتر است این نقاط تا حد ممکن به طور یکنواخت در بازه $[a, b]$ توضیع شده باشند و تعداد آن‌ها باید کمتر از $m-n+2$ (برای مثال، $0.5(m-n+2)$) باشد. در غیر این صورت، این معادلات y_m را به طور دقیق معلوم می‌کنند. برای نقاط که اندیس آن‌ها را I در نظر می‌گیریم، خطاهای متناظر با تابع باقیمانده را کمینه خواهیم کرد. توضیح بالا منجر به پیشنهاد سه رویکرد می‌شود: الف) کمینه‌سازی مجموع مربعات خطا ب) کمینه‌سازی مجموع خطا و پ) کمینه‌سازی مجموع خطا. در هر سه رویکرد اگر $n_p = m-n+2$، خطا در همه نقاط هم‌مکانی صفر شده و روش هم‌ارز روش هم‌مکانی خواهد شد. در غیر این صورت، چون کمینه‌سازی خطا در نقاط بیشتری مد نظر قرار می‌گیرد (به عبارتی، فضای امکان‌پذیر بزرگ‌تر است)، باید حداکثر خطای تقریب دست‌کم روی نقاط مورد استفاده کم‌تر از خطای تقریب در روش هم‌مکانی باشد.

۵. نتایج عددی

ما مسایل آزمون گوناگون با شرایط اولیه و یا مرزی از مرتبه‌های مختلف در نظر گرفتیم که شامل ۷ مساله مرتبه ۲ و ۶ مساله از مرتبه بزرگ‌تر بودند. نمودارهای شکل ۱ سطح کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی ما (کمینه‌سازی مجموع مربعات خطا PM1، مجموع خطا PM2 و بیشینه خطا PM3) و روش هم‌مکانی CM را روی تمامی مسایل آزمون و برای m های مختلف را نشان می‌دهد. برای مقایسه از معیار دولان و مورہ [۴] استفاده شده است. با توجه به این معیار در مقایسه عملکرد دو الگوریتم، الگوریتمی کارایی بهتر دارد که نمودار آن بالاتر از نمودار متناظر با الگوریتم دیگر قرار بگیرد و البته هر چه اختلاف بین دو نمودار بیش‌تر باشد، تفاوت بیشتري بین کارایی دو الگوریتم روی مسایل مورد آزمون وجود داشته است. نمودارهای شکل ۱ به خوبی نشان می‌دهند که



شکل ۱: نمودارهای عملکرد الگوریتم‌های CM، PM۱ PM۲ و PM۳ با معیار خطای میانگین

الگوریتم‌های پیشنهادی مبتنی بر بهینه‌سازی ما نسبت به روش هم‌مکانی عملکرد بهتری داشته‌اند. در این میان، به ترتیب الگوریتم‌های PM۱، PM۲ و سپس PM۳ بهترین عملکردها را نشان داده‌اند.

مراجع

1. A. A. Akyüz-Daşcioğlu, N. Isler, *Bernstain collocation method for solving nonlinear differential equations*, Math. Compu. App., **18** (2013), no. 3, 293–300.
2. M.I. Bhatti, P. Bracken, *Solutions of differential equations in a Bernstein polynomial basis*, J. Comp. Appl. Math., **205** (2007), 272–280.
3. E.H. Doha, A.H. Bhrawy, M.A. Saker, *On the derivatives of Bernstein polynomials: An application for the solution of high even-order differential equations*, Boundary Value Problems, (2011), 1–16.
4. E.D. Dolan, J.J Moré, *Benchmarking optimization software with performance profiles*, Math. Program., **91** (2002), 201-213.
5. R.T. Farouki,T.N.T. Goodman, *On the optimal stability of the Bernstein basis*, Mathematics of Computation, **65** (1996), no. 216, 1553–1566.
6. B.-n Jiang, *Least-squares free collocation method mesh*, International Journal of Computational Methods, **2** (2012), no. 9, 1240031.
7. G.G. Lorentz, *Bernstein polynomials*, Chelsea Publishing, New York, 1986.
8. D. Mortari, *Least-squares solutions of linear differential equations*, MDPI Mathematics, **5** (2017), no. 48, 1–18.